


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE
RI
TAS



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME SÉRIE.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

JANVIER 1887.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, rue Hallé, 32 et 34,
ou à M. BRISSE, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine).
(AFFRANCHIR.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

Ce Recueil paraît chaque mois.

Par application de la loi du 7 avril 1879, tous les bureaux de poste de France, d'Algérie, de Belgique, de Danemark, d'Italie, de Norvège, des Pays-Bas, de Suède et de Suisse sont autorisés à recevoir les abonnements. L'éditeur des *Nouvelles Annales de Mathématiques* prend à sa charge la remise perçue par l'Administration, et il suffit de verser à un bureau de poste, sans frais supplémentaires, le montant de l'abonnement.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE

RÉDIGÉ PAR

M. GERONO,
Professeur de Mathématiques,

ET

M. CH. BRISSE,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet et Bourget.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* paraissent chaque mois et forment par an un volume in-8 de 36 feuilles, avec figures dans le texte. L'année 1887 est en cours de publication.

Les abonnements sont annuels et partent de janvier.

Prix pour un an (12 *numéros*) :

Paris	15 fr.
Départements et Pays faisant partie de l'Union postale	17
Autres pays	20

PREMIÈRE SÉRIE : 20 volumes in-8 (1842 à 1861) .... 300 fr.
Les tomes I à VII, X et XVI à XX (1842-1848, 1851 et 1857-1861) ne se vendent pas séparément.
Les autres tomes de la première série se vendent séparément .... 15 fr.

DEUXIÈME SÉRIE : 20 volumes in-8 (1862 à 1881) .... 300 fr.
Les tomes I à III et V à VIII (1862 à 1869) ne se vendent pas séparément.
Les tomes suivants de la deuxième série se vendent séparément. 15 fr.

On peut se procurer l'une des Séries ou les deux Séries au moyen de payements mensuels de 30 *fr.*

La **TROISIÈME SÉRIE**, commencée en 1882, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1887.


ΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME SIXIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1887

1887, Jan. 28 - 1888, Feb. 8

[illegible] fund.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR L'ÉQUATION DE DEGRÉ m QUI DONNE $\tang \frac{a}{m}$ LORSQU'ON CONNAIT $\tang a$;

PAR M. CH. BIEHLER.

L'équation de degré m, qui donne $\tang \frac{a}{m}$ lorsqu'on connaît $\tang a$, est, comme on sait,

$$i\alpha = \frac{(1+ix)^m - (1-ix)^m}{(1+ix)^m + (1-ix)^m},$$

en posant $\tang \frac{a}{m} = x$ et $\tang a = \alpha$.

Cette équation, mise sous forme entière, devient

$$(1+ix)^m(1-i\alpha) - (1-ix)^m(1+i\alpha) = 0.$$

Les deux expressions

$$(1+ix)^m(1-i\alpha) \quad \text{et} \quad (1-ix)^m(1+i\alpha)$$

étant imaginaires conjuguées, leur différence renferme i en facteur, et, par suite, en posant

$$(1) \qquad iV_m = (1+ix)^m(1-i\alpha) - (1-ix)^m(1+i\alpha),$$

le polynôme V_m sera à coefficients réels et de degré m.

Cela posé, nous allons former l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait le polynôme V_m, et nous allons appliquer les théorèmes de Sturm et de Rolle aux polynômes qui figurent dans cette équation,

en vue de démontrer que $V_m = 0$ a toutes ses racines réelles.

1. A cet effet, prenons les dérivées des deux membres de l'égalité (1), il viendra

$$iV'_m = mi[(1+ix)^{m-1}(1-i\alpha) + (1-ix)^{m-1}(1+i\alpha)]$$

ou

$$(2)\quad V'_m = m[(1+ix)^{m-1}(1-i\alpha) + (1-ix)^{m-1}(1+i\alpha);$$

en dérivant une seconde fois,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} V''_m = m(m-1)\,i[&(1+ix)^{m-2}(1-i\alpha) \\ &-(1-ix)^{m-2}(1+i\alpha)]. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, en multipliant les deux membres de l'égalité (2), le premier par $2ix$, le second par

$$(1+ix)-(1-ix),$$

qui lui est égal, il viendra

$$\begin{aligned} 2ixV'_m = m[&(1+ix)^m(1-i\alpha)-(1-ix)^m(1+i\alpha)] \\ + m[&-(1+ix)^{m-1}(1-ix)(1-i\alpha) \\ &+(1-ix)^{m-1}(1+ix)(1+i\alpha)], \end{aligned}$$

et, en remplaçant le produit $(1+ix)(1-ix)$ par $i+x^2$, on aura

$$\begin{aligned} 2ixV'_m = miV_m - m(1+x^2) \\ \times [(1+ix)^{m-2}(1-i\alpha)-(1-ix)^{m-2}(1+i\alpha)] \end{aligned}$$

ou

$$2ixV'_m = miV_m - (1+x^2)\frac{V''}{(m-1)i}$$

ou enfin

$$2xV'_m(m-1) = m(m-1)V_m + (1+x^2)V''_m,$$

que l'on peut écrire

$$(4)\quad m(m-1)V_m - 2(m-1)xV'_m + (1+x^2)V''_m = 0.$$

Cette équation va nous permettre de démontrer la réalité de toutes les racines de $V_m = 0$.

2. A cet effet, prenons les dérivées d'ordre μ des deux membres de l'équation (4), il viendra

$$m(m-1)V_m^{(\mu)} - 2(m-1)xV_m^{(\mu+1)} - 2\mu(m-1)V_m^{(\mu)} + (1+x^2)V_m^{(\mu+2)} + 2\mu x V_m^{(\mu+1)} + \mu(\mu-1)V^{(\mu)} = 0$$

ou bien

$$(m-\mu)(m-\mu-1)V_m^{(\mu)} - 2(m-\mu-1)xV_m^{(\mu+1)} + (1+x^2)V_m^{(\mu+2)} = 0.$$

En donnant à μ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-2$, il viendra

$$m(m-1)V_m - 2(m-1)x\,V'_m + (1+x^2)V''_m = 0,$$
$$(m-1)(m-2)V'_m - 2(m-2)xV''_m + (1+x^2)V'''_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2V_m^{(m-2)} - 2 - 2xV_m^{(m-1)} + (1+x^2)V_m^{(m)} = 0.$$

Ces relations nous montrent que les fonctions $V_m, V'_m, V''_m, \ldots, V_m^{(m)}$ jouissent des propriétés requises pour que le théorème de Sturm puisse leur être appliqué. En effet, la dernière $V_m^{(m)}$ ne change pas de signe, c'est une constante; deux fonctions consécutives ne peuvent pas s'annuler pour une même valeur de x; si une fonction $V_m^{(\mu)}$ s'annule pour une valeur de x, les fonctions $V_m^{(\mu-1)}$ et $V_m^{(\mu+1)}$ prennent pour cette valeur de x des signes contraires; enfin V'_m est la dérivée de V_m. Il s'ensuit que, la suite $V_m, V'_m, \ldots, V_m^{(m)}$ ne présentant que des variations pour $x = -\infty$ et des permanences pour $x = +\infty$, la suite perd m variations quand x passe de $-\infty$ à $+\infty$; par suite, toutes les racines de l'équation $V_m = 0$ sont réelles et inégales.

3. Appliquons maintenant le théorème de Rolle pour établir la réalité de toutes les racines de $V_m = 0$.

Remarquons, à cet effet, que l'égalité (3) nous donne la relation

$$V''_m = -m(m-1)V_{m-2},$$

V_{m-2} étant ce que devient V_m quand on y remplace m par $m-2$, α restant le même, et supposons que les racines de $V_{m-2}=0$ soient réelles et inégales. Nous allons démontrer qu'il en est de même des racines de $V_m = 0$.

Pour cela, considérons la seconde des équations différentielles du tableau précédent, à savoir :

$$(5) \quad (m-1)(m-2)V'_m - 2(m-2)xV''_m + (1+x^2)V'''_m = 0,$$

déduite de l'équation (4).

Les racines de V_{m-2} étant réelles et inégales et désignées par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-2}$ dans l'ordre croissant, substituons-les dans la relation (5) ; on aura le tableau suivant :

$$(m-1)(m-2)V'_m(\alpha_1) + (1+\alpha_1^2)V'''_m(\alpha_1) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(m-1)(m-2)V'_m(\alpha_{m-2}) + (1+\alpha_{m-2}^2)V'''_m(\alpha_{m-2}) = 0,$$

car $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-2}$ sont racines de l'équation $V''_m = 0$.

Or, d'après le théorème de Rolle, les quantités

$$V'''_m(\alpha_1), \quad V'''_m(\alpha_2), \quad \ldots, \quad V'''_m(\alpha_{m-2})$$

ne présentent que des variations; il en est donc de même des quantités

$$V'_m(\alpha_1), \quad V'_m(\alpha_2), \quad \ldots, \quad V'_m(\alpha_{m-2}).$$

Mais on sait que, si toutes les racines de l'équation dérivée d'une équation proposée sont réelles et inégales, et si, substituées dans le premier membre de la proposée par ordre de grandeur, elles donnent des résultats de substitutions de signes contraires, toutes les racines de la proposée sont réelles.

Il s'ensuit que toutes les racines de l'équation $V'_m = 0$ sont réelles et inégales.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ les $(m-1)$ racines réelles de $V'_{m-1} = 0$; en les substituant dans l'équation (4), on

aura

$$m(m-1)V_m(b_1)+(1+b_1^2)V''_m(b_1)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$m(m-1)V_m(b_{m-1})+(1+b_{m-1}^2)V''_m(b_{m-1})=0;$$

mais, d'après le théorème de Rolle,

$$V''_m(b_1),\quad V''_m(b_2),\quad \ldots,\quad V''_m(b_{m-1})$$

sont alternativement de signes contraires; donc les quantités

$$V_m(b_1),\quad V_m(b_2),\quad \ldots,\quad V_m(b_{m-1})$$

ne présentent elles-mêmes que des variations. Il s'ensuit que toutes les racines de l'équation $V_m=0$ sont réelles et inégales.

Nous avons supposé que l'équation $V_{m-2}=0$ a toutes ses racines réelles et inégales. Cette propriété se reconnaît immédiatement sur les équations

$$V_1=0 \quad \text{et} \quad V_2=0,$$

qui sont

$$V_1=2(x-\alpha),\qquad V_2=2[a(x^2-1)+2x].$$

On en conclut que, d'une part, $V_{2n+1}=0$ a toutes ses racines réelles, et, d'autre part, que $V_{2n}=0$ a aussi toutes ses racines réelles; par suite, on peut dire d'une manière générale que l'équation $V_m=0$ a toutes ses racines réelles et inégales.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DONT TOUTES LES RACINES SONT RÉELLES;

PAR M. CH. BIEHLER.

---

1. Si l'on pose

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}},$$

la dérivée d'ordre n de y par rapport à α est une expression de la forme

$$\frac{Q_n(x, \alpha)}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

où $Q_n(x, \alpha)$ est un polynôme de degré n en x et de degré n en α.

Je vais mettre en évidence quelques propriétés du polynôme $Q_n(x, \alpha)$, et je supposerai, dans ce qui va suivre, que x ait reçu des valeurs telles que le trinôme $1 - 2\alpha x + \alpha^2$ ait ses zéros imaginaires, c'est-à-dire que x soit compris entre -1 et $+1$.

De l'égalité

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}},$$

on tire

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} \times \frac{x - \alpha}{1 - 2\alpha x + \alpha^2}$$

ou bien

$$y'(1 - 2\alpha x + \alpha^2) + y(\alpha - x) = 0.$$

En dérivant n fois les deux membres par rapport à α, il viendra

$$y^{(n+1)}(1 - 2\alpha x + \alpha^2) + (2n + 1)y^{(n)}(\alpha - x) + n^2 y^{(n-1)} = 0.$$

En remplaçant $y^{(n+1)}, y^{(n)}, y^{(n-1)}$ par leurs valeurs exprimées en fonction des polynômes de la forme $Q_n(x, \alpha)$, on aura

$$(a) \quad \begin{cases} Q_{n+1}(x, \alpha) + (2n + 1)(\alpha - x)Q_n(x, \alpha) \\ \qquad + n^2(1 - 2\alpha x + \alpha^2)Q_{n-1}(x, \alpha) = 0. \end{cases}$$

En différentiant l'équation

$$y^{(n)} = \frac{Q_n(x, \alpha)}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

par rapport à α, on obtiendra la relation suivante

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & Q_{n+1}(x, \alpha)+(2n+1)(\alpha-x)Q_n(x, \alpha) \\ & \qquad -(1-2\alpha x+\alpha^2)Q'_n(x, \alpha)=0; \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire, en comparant les égalités (a) et (b),

$$(c)\qquad Q'_n(x, \alpha)=-n^2 Q_{n-1}(x, \alpha).$$

Enfin, au moyen des égalités (b) et (c), on peut obtenir l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait le polynôme $Q_n(x, \alpha)$. Il suffit pour cela de différentier par rapport à α l'équation (b) et de remplacer dans le résultat

$$Q'_{n+1}(x, \alpha) \quad \text{par} \quad -(n+1)^2 Q_n(x, \alpha),$$

qui sont identiques d'après la relation (c).

On obtient ainsi l'équation

$$(d)\quad \left\{ \begin{aligned} & Q''_n(x, \alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2) \\ & \quad -(2n-1)(\alpha-x)Q'_n(x, \alpha)+n^2 Q_n(x, \alpha)=0. \end{aligned} \right.$$

2. Les relations (a), (c), (d) vont nous permettre de démontrer que l'équation

$$Q_n(x, \alpha)=0$$

de degré n en α a toutes ses racines réelles, pourvu que x soit compris entre -1 et $+1$.

La relation (a) est en effet le type de la série des égalités

$$Q_n(x,\alpha)+(2n-1)(\alpha-x)Q_{n-1}(x,\alpha)+(n-1)^2 Q_{n-2}(x,\alpha)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Q_2(x, \alpha)+3(\alpha-x)Q_1(x, \alpha)+Q_0=0,$$

qui montrent que le théorème de Sturm est applicable à l'équation

$$Q_n(x, \alpha)=0.$$

La relation (a) montre en outre que les coefficients

des plus hautes puissances de α dans les fonctions

$$Q_n(x, \alpha), \quad Q_{n-1}(x, \alpha), \quad \ldots, \quad Q_0$$

ont des signes alternés. Il s'ensuit que, pour $\alpha = -\infty$, la suite

$$Q_n(x, \alpha), \quad Q_{n-1}(x, \alpha), \quad \ldots, \quad Q_0$$

ne présente que des permanences et que, pour $\alpha = +\infty$, elle ne présente que des variations; la suite gagne n variations quand α croît de $-\infty$ à $+\infty$; par suite, toutes les racines de l'équation

$$Q_n(x, \alpha) = 0,$$

considérée comme une équation en α, sont réelles.

Le théorème de Sturm peut être appliqué aussi à la série des fonctions

$$Q_n(x, \alpha), \quad Q'_n(x, \alpha), \quad \ldots, \quad Q_n^{(n)}(x, \alpha);$$

il suffit, pour le faire voir, de considérer l'équation différentielle (d) et de former le tableau

$$Q''_n(x, \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2) - (2n - 1)(\alpha - x)Q'_n(x, \alpha) + n^2 Q_n(x, \alpha) = 0,$$
$$Q'''_n(x, \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2) - (2n - 3)(\alpha - x)Q''_n(x, \alpha) + (n - 1)^2 Q'_n(x, \alpha) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Q_n^{(n)}(x, \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2) - 3(\alpha - x)Q_n^{(n-1)}(x, \alpha) + 2^2 Q_n^{(n-2)}(x, \alpha) = 0,$$

qui nous montre que les dérivées de $Q_n(x, \alpha)$ jouissent des propriétés des fonctions de Sturm.

On pourrait aussi appliquer le théorème de Rolle pour arriver au même résultat; il suffirait de considérer la relation (a), en faisant aussi usage de (c); la relation (c) nous montre en effet que

$$Q'_{n+1}(x, \alpha) = -(n + 1)^2 Q_n(x, \alpha),$$

et, si l'on admet que $Q_n(x, \alpha) = 0$ a toutes ses racines réelles et séparées par celles de $Q_{n-1} = 0$, on montre

aisément que $Q_{n+1}(x, \alpha) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles et séparées par celles de $Q_n(x, \alpha) = 0$.

On arrive encore au même résultat en appliquant le théorème de Rolle, au moyen de l'équation différentielle (d). On voit clairement, dans tout ce qui précède, la nécessité de supposer que le polynôme

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)$$

ne change pas de signe quand α varie de $-\infty$ à $+\infty$ et par suite la nécessité d'astreindre x à être compris entre -1 et $+1$.

3. Si l'on développe la fonction $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$ suivant les puissances ascendantes de α, sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = X_0 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \ldots + \alpha^n X_n + \ldots,$$

les coefficients $X_0, X_1, \ldots, X_n$ sont, comme l'on sait, les polynômes de Legendre. Leur degré en x est égal à l'indice de X. Ces polynômes sont liés aux polynômes $Q_n(x, \alpha)$ par la relation

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n y}{d\alpha^n}\right)_0 = X_n;$$

or

$$\frac{d^n y}{d\alpha^n} = \frac{Q_n(x, \alpha)}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

En faisant $\alpha = 0$ dans cette égalité, on obtient

$$1.2.3\ldots n X_n = Q_n(x, 0).$$

Cette relation nous fournit immédiatement celle qui lie entre eux trois polynômes X d'indices consécutifs. En faisant $\alpha = 0$ dans la relation (a), on obtient

$$Q_{n+1}(x, 0) + (2n + 1)(-x) Q_n(x, 0) + n^2 Q_{n-1}(x, 0) = 0$$

ou

$$(n-1)!\,X_{n+1}-(2n-1)x.n!\,X_n+n^2(n-1)!\,X_{n-1}=0.$$

en désignant le produit 1.2.3...n par $n!$.

En supprimant le facteur numérique $n!$, il viendra

$$(e)\qquad (n+1)X_{n+1}-(2n+1)xX_n+nX_{n-1}=0.$$

Cette relation permet d'appliquer le théorème de Sturm à l'équation

$$X_n=0,$$

et de montrer qu'elle a toutes ses racines réelles.

Pour savoir si la suite $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0$ gagne ou perd ses variations, il suffit de considérer l'équation (e), qui nous fait voir que les coefficients de la plus haute puissance de x ont le même signe dans toutes les fonctions $X_n, X_{n-1}, \ldots, X$. La suite perd donc ses variations quand x passe de $-\infty$ à $+\infty$.

Le polynôme $Q_n(x, \alpha)$ peut s'exprimer d'une manière simple en fonction des quantités X_n.

On a, en effet,

$$Q_n(x,\alpha)=Q_n(x,0)+\alpha Q'_n(x,0)\\+\frac{\alpha^2}{1.2}Q''_n(x,0)+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}Q_n^{(n)}(x,0),$$

les dérivées étant prises par rapport à α.

D'après la relation (c),

$$Q'_n(x,\alpha)=-n^2Q_{n-1}(x,\alpha);$$

par suite,

$$Q''_n(x,\alpha)=-n^2Q'_{n-1}(x,\alpha)=n^2(n-1)^2Q_{n-2}(x,\alpha),$$

....

$$Q^{(\mu)}(x,\alpha)=(-1)^\mu n^2(n-1)^2\ldots(n-\mu+1)^2Q_{n-\mu}(x,\alpha).$$

En faisant $\alpha = 0$ dans toutes ces égalités, on aura

$$Q'_n(x, 0) = -n^2 Q_{n-1}(x, 0),$$
$$Q''_n(x, 0) = n^2(n-1)^2 Q_{n-2}(x, 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q^{(\mu)}(x, 0) = (-1)^\mu n^2(n-1)^2 \ldots (n-\mu+1)^2 Q_{n-\mu}(x, 0),$$

et, en remplaçant $Q_{n-1}(x, 0), \ldots, Q_{n-\mu}(x, 0)$ par leur expression en $X_{n-1}, \ldots, X_{n-\mu}$, il viendra

$$Q'_n(x, 0) = -n.n!\, X_{n-1},$$
$$Q''_n(x, 0) = n(n-1)\, n!\, X_{n-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_n^{(\mu)}(x, 0) = (-1)^\mu n(n-1) \ldots (n-\mu+1)\, n!\, X_{n-\mu}:$$

on peut donc écrire

$$\frac{Q_n(x, \alpha)}{n!} = X_n - n\alpha X_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \alpha^2 X_{n-2} + \ldots$$
$$+ (-1)^\mu \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{\mu!} \alpha^\mu X_{n-\mu} + \ldots$$

L'équation différentielle (d) nous fournit la valeur de $Q_n(x, \alpha)$ pour $x = 0$; cette expression peut aussi se tirer de la précédente en remarquant qu'on a, d'une manière générale,

$$(n+1)[X_{n+1}]_{x=0} + n[X_{n-1}]_{x=0} = 0.$$

Les polynômes X_n ne renferment, d'après la relation (e), que des puissances de même parité; l'expression de $Q_n(0, \alpha)$ ne renfermera donc que des puissances de α de même parité. L'équation différentielle (d) nous donne

$$(-1)^n \frac{Q_n(0, \alpha)}{n!} = \alpha^n - \frac{n(n-1)}{1.2^2} \alpha^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 \times 2^4} \alpha^{n-4} + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(1.2.3.p)^2\, 2^{2p}} \alpha^{n-2p} + \ldots$$

La valeur $x = 0$ transforme $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)$ en $1 + \alpha^2$; par suite, l'équation

$$Q_n(0, \alpha) = 0$$

a aussi toutes ses racines réelles.

4. Nous allons maintenant chercher d'autres expressions du polynôme X_n.

A cet effet, remarquons que

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$$

peut s'écrire

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x - \alpha}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{x - \alpha}{\sqrt{1 - x^2}} = z,$$

on aura

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}},$$

par suite

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial z}\left(\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n} = \frac{\partial^n y}{\partial z^n} \frac{(-1)}{(\sqrt{1 - x^2})^n}.$$

Or

$$\frac{\partial^n y}{\partial z^n} = \frac{Q_n(0, z)}{(1 + z^2)^{+n\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

par suite

$$\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n} = \frac{Q_n(0, z)}{(1 + z^2)^{n + \frac{1}{2}}} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{1 - x^2})^n} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

et, faisant $\alpha = 0$,

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}\right)_{\alpha=0} = \frac{Q_n(0, z_0)}{(1+z_0^2)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}},$$

en désignant par z_0 ce que devient z pour $\alpha = 0$. Mais

$$z = \frac{x-\alpha}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{donc} \qquad z_0 = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$1 + z_0^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2};$$

par suite

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}\right)_0 = Q_n\left(0, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \frac{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}(-1)^n}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}},$$

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}\right)_0 = (-1)^n Q_n\left(0, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)(\sqrt{1-x^2})^n,$$

ou enfin

$$n!\,X_n = (-1)^n Q_n\left(0, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)(\sqrt{1-x^2})^n.$$

Cette égalité nous fait voir que les racines de l'équation $X_n = 0$ sont toutes comprises entre -1 et $+1$.

En effet, l'équation

$$Q_n(0, \alpha) = 0$$

a toutes ses racines réelles; soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ces racines.

Les racines de l'équation $X_n = 0$ étant désignées par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n^2}},$$

d'où

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1+\alpha_1^2}}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{1+\alpha_n^2}},$$

au signe près; on voit par suite que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont

toutes réelles et plus petites que l'unité en valeur absolue.

Nous avons trouvé l'expression de $Q_n(o, \alpha)$, à savoir

$$(-1)^n \frac{Q_n(o, \alpha)}{n!} = \alpha^n - \frac{n(n-1)}{1.2^2} \alpha^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 2^4} \alpha^{n-4} - \ldots;$$

on en déduit

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{(-1)^n}{n!} Q_n\left(o, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) (\sqrt{1-x^2})^n \\ &= x^n - \frac{n(n-1)}{1.2^2} x^{n-2}(1-x^2) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 2^4} x^{n-4}(1-x^2)^2 + \ldots \\ &+ (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(p!)^2 \times 2^{2p}} x^{n-2p}(1-x^2)^p + \ldots. \end{aligned}$$

On sait que, si l'on prend la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$ en employant la formule connue pour la dérivée d'ordre n d'une fonction de fonction de la forme $\varphi(x^2)$, à savoir

$$\frac{d^n[\varphi(x^2)]}{dx^n} = (2x)^n \varphi^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} \varphi^{n-1}(x^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} (2x)^{n-4} \varphi^{n-2}(x^2) + \ldots,$$

il viendra

$$\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} = 2^n n! \left[x^n + \frac{n(n-1)}{2^2} x^{n-2}(x^2-1) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 2^4} x^{n-4}(x^2-1)^2 + \ldots\right].$$

En comparant cette expression avec celle de X_n précédemment trouvée, il viendra

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n},$$

qui est l'expression bien connue du polynôme X_n.

SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ D'UNE EXPRESSION DIFFÉRENTIELLE;

PAR M. H. LAURENT.

On dit ordinairement que, pour que l'expression

(1) $$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n$$

soit une différentielle exacte, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il faut et il suffit que les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations comprises dans le type

(2) $$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0$$

soient identiquement satisfaites; mais ce que l'on ne dit pas toujours, c'est que ces conditions peuvent être remplacées par d'autres moins générales.

Si l'on pose

$$p_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i},$$

Jacobi a remarqué que l'on avait

(3) $$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_j} = 0.$$

Ce résultat est facile à vérifier en effectuant les différentiations indiquées. Il en a conclu qu'une partie des relations (2) rentraient les unes dans les autres, lorsque n était plus grand que 3. Mais l'illustre géomètre aurait pu déduire d'autres conséquences de la formule (3). Supposons, en effet, $p_{ij} = 0$, $p_{ik} = -p_{ki} = 0$; on aura

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_j} = 0,$$

et, par suite, p_{ik} est indépendant de x_j; il résulte de là que, si l'on a

$$p_{12}=0, \qquad p_{13}=0, \qquad \ldots, \qquad p_{1n}=0,$$

les quantités p_{ij}, où i et j sont différents de 1, sont indépendantes de x_1. Si donc elles sont nulles pour une valeur particulière x_1^0 de x_1, elles seront nulles, quel que soit x_1; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Pour que l'expression (1) *soit une différentielle exacte, il faut et il suffit :*

1° *Que l'on ait identiquement*

$$(4)\quad \frac{\partial p_1}{\partial x_2}=\frac{\partial p_2}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial x_3}=\frac{\partial p_3}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial x_n}=\frac{\partial p_n}{\partial x_1};$$

2° *Que l'expression*

$$p_2\,dx_2+\ldots+p_n\,dx_n$$

soit une différentielle exacte relativement à $x_2, x_3, \ldots, x_n$ *pour* $x_1=x_1^0$.

En d'autres termes, les relations (2), dans lesquelles i et j sont différents de 1, n'ont besoin d'être satisfaites que pour $x_1=x_1^0$.

Cette remarque m'a permis de simplifier un certain nombre de théories relatives aux dérivées partielles; je vais montrer comment elle conduit de la façon la plus simple à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$(5)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

qui est le type auquel on peut ramener toutes les équations du premier ordre. Dans cette équation, u désigne une fonction inconnue des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ et de $p_1=\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, p_n=\frac{\partial u}{\partial x_n}$ ne contenant pas u explicitement.

Intégrer l'équation (1), c'est trouver des fonctions p_1, $p_2, \ldots, p_n$ rendant l'expression

$$p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n + f\,dt$$

égale à une différentielle exacte du dont l'intégrale sera alors la fonction inconnue u. D'après notre remarque, il faudrait que l'on eût

$$(6)\qquad \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{df}{dx_1}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{df}{dx_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial p_n}{\partial t} = \frac{df}{dx_n}$$

identiquement, et que, pour $t = t^0$, on eût

$$(7)\qquad p_1 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{\partial \varpi}{\partial x_n},$$

ϖ désignant une fonction arbitraire de $x_1, \ldots, x_n$, à laquelle se réduira u pour $t = t^0$.

Les équations (6) doivent s'écrire

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_{11} + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_{21} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p_{n1}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_{12} + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_{22} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p_{n2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

p_{ij} désignant, pour abréger, $\frac{\partial p_i}{\partial x_j}$. Je remplace ces équations par les suivantes :

$$(8\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_{11} + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_{12} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p_{1n}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_{21} + \frac{\partial f}{\partial p_2} p_{22} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p_{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Il faut intégrer le système (8), de telle sorte que, pour $t = t^0$, on ait

$$p_i = \frac{\partial \varpi}{\partial x_i},$$

et alors $p_1, p_2, \ldots$ seront les dérivées de la fonction u

satisfaisant à l'équation (5). Mais, en intégrant le système (8 *bis*), de telle sorte que, pour $t = t^0$, on ait

$$p_i = \frac{\partial \varpi}{\partial x_i},$$

les fonctions p seront aussi les dérivées d'une certaine fonction, et l'on aura

$$p_{ij} = p_{ji},$$

et, par suite, les équations (8) auront, dans l'hypothèse où l'on s'est placé, les mêmes solutions que (8 *bis*). Ce sont alors les équations (8) que nous allons essayer d'intégrer.

On a

$$dp_1 = p_{11}\, dx_1 + p_{12}\, dx_2 + \ldots + p_{1n}\, dx_n + \frac{\partial p_1}{\partial t}\, dt,$$

$$dp_2 = p_{21}\, dx_1 + p_{22}\, dx_2 + \ldots + p_{2n}\, dx_n + \frac{\partial p_2}{\partial t}\, dt,$$

....

Tirons $\frac{\partial p_1}{\partial t}, \frac{\partial p_2}{\partial t}, \cdots$ des équations (8) pour les porter dans celles-ci, elles deviendront

$$p_{11}\left(dx_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1}\, dt\right) + \ldots + p_{1n}\left(dx_n + \frac{df}{dp_n}\, dt\right) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dt - dp_1 = 0,$$

$$p_{21}\left(dx_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1}\, dt\right) + \ldots + p_{1n}\left(dx_n + \frac{\partial f}{\partial p_n}\, dt\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dt - dp_2 = 0,$$

....,

et si l'on établit entre les x et les p les relations suivantes :

$$(9) \qquad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial p_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

il faudra, en vertu des équations précédentes, que l'on ait aussi

$$(10) \qquad \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dp_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Intégrons alors les équations (9) et (10) qui sont des équations différentielles ordinaires, de telle sorte que, pour $t = t^0$, on ait

$$x_i = x_i^0, \qquad p_i = p_i^0;$$

n des intégrales de ces équations devront être des conséquences des n autres, et les intégrales $p_1, p_2, \ldots$ des équations (8) s'obtiendront en écrivant n relations arbitraires entre $p_1^0, p_2^0, \ldots, x_1^0, x_2^0, \ldots$.

Prenons, pour ces relations arbitraires,

$$(11) \qquad p_1^0 = \frac{\partial\varpi}{\partial x_1^0}, \qquad \ldots, \qquad p_n^0 = \frac{\partial\varpi}{\partial x_n^0},$$

$\varpi(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ désignant une fonction arbitraire de $x_1^0, \ldots, x_n^0$; les quantités p ainsi déterminées rendront $\Sigma p\,dx + f\,dt$ différentielle exacte d'une fonction u qui, pour $t = t^0$, se réduira à $\varpi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

En effet, soient

$$p_1^0 = \theta_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t), \qquad p_2^0 = \theta_2, \qquad p_n = \theta_n,$$
$$x_1^0 = \psi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t), \qquad x_2^0 = \psi_2, \qquad x_n = \psi_n$$

les intégrales de (9), (10), les intégrales de (8) seront les résultantes provenant de l'élimination de $x_1^0, x_2^0, \ldots$ entre

$$\frac{\partial\varpi}{\partial x_1^0} = \theta_1(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial x_2^0} = \theta_2, \qquad \ldots,$$
$$x_1^0 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad x_2^0 = \psi_2, \qquad \ldots.$$

Si l'on fait $t = t^0$, ces formules devront être identiquement satisfaites pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots$; ainsi l'on a les identités

$$\frac{\partial\varpi}{\partial x_1^0} = \theta_1(x_1^0, \ldots, x_n^0, t^0), \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial x_2^0} = \theta_2, \qquad \ldots.$$

Mais les x^0 étant arbitraires, on peut les remplacer par

les x, et l'on a

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x_1} = \theta_1(x_1, \ldots, x_n, t^0), \qquad \ldots.$$

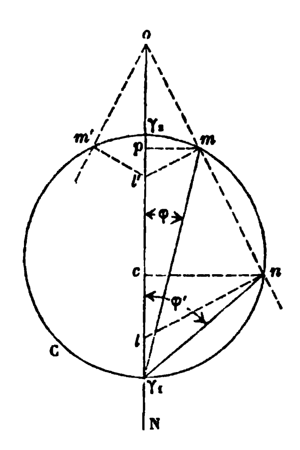
Mais $\theta_1(x_1, \ldots, x_n, t_0)$ est la valeur de p_1 pour $t = t^0$; donc, pour $t = t^0$, $p_1, p_2, \ldots$ se réduisent aux dérivées de $\varpi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et u à la fonction ϖ, si l'on veut.

C. Q. F. D.

NOTE SUR LA COURBURE DES SECTIONS NORMALES D'UNE SURFACE;

PAR M. GENTY.

1. Soient N la normale en un point o d'une surface; γ_1 et γ_2 les centres de courbure principaux pour ce



point : on demande le centre de courbure de la section normale qui fait un angle φ avec le plan de la section principale dont le centre de courbure est γ_1.

Soit C le cercle décrit dans le plan de la figure sur $\gamma_1\gamma_2$ comme diamètre. Menons par le point γ_1 une ligne faisant avec N l'angle φ et soit m le point où elle rencontre de nouveau C; soit n le second point de rencontre avec ce cercle de la ligne om; la perpendiculaire élevée sur om au point n coupe N au centre de courbure cherché.

En effet, abaissons du point m une perpendiculaire mp sur N; on aura

$$op.ol = om.on = R_1 R_2,$$

R_1 et R_2 désignant les rayons de courbure principaux.

Donc

$$\frac{1}{ol} = \frac{op}{R_1 R_2}.$$

Or on a

$$op = o\gamma_2 + \gamma_2 p = R_2 + (R_1 - R_2)\sin^2\varphi = R_1 \sin^2\varphi + R_2 \cos^2\varphi.$$

Donc, enfin,

$$\frac{1}{ol} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2};$$

c'est la relation d'Euler.

2. Désignons par φ' l'angle $\widehat{o\gamma_1 n}$. On a

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi' = \frac{o\gamma_2}{o\gamma_1} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Or la relation qui lie les angles φ et φ' correspondant à deux sections normales conjuguées est

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi' = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Si donc m' est le point du cercle C symétrique du point m par rapport à N, la perpendiculaire élevée en m' sur la droite om' coupe N au centre de courbure l' de la section

normale conjuguée de celle que nous avons considérée en premier lieu. On obtient plus simplement le point l' en élevant au point m une perpendiculaire sur om. Donc :

Les perpendiculaires élevées aux extrémités d'une corde du cercle C *passant par le point* o *déterminent sur* N *les centres de courbure de deux sections normales conjuguées.*

On reconnaît sans difficulté que l'angle $\widehat{con}$ est complémentaire de celui des deux sections normales conjuguées qui ont leurs centres de courbure aux points l et l' respectivement.

3. Le point n est celui que M. Mannheim appelle le *point représentatif* et M. Dewulf le *centre perspectif* de la normalie dont la directrice est une courbe tracée sur la surface à partir du point o et qui est tangente à la section normale dont le centre de courbure est en l. Le point central de cette normalie est le pied c de la perpendiculaire abaissée du point n sur N et le plan central de cette normalie fait avec le plan de la section principale dont le centre de courbure est γ_1 un angle égal à $\widehat{n\gamma_1\gamma_2}$, c'est-à-dire à φ'. En tenant compte du sens dans lequel doit être mesuré cet angle, on retrouve immédiatement ce théorème de M. Mannheim :

La tangente en un point o *de la directrice d'une normalie à une surface et la trace du plan central de cette normalie sur le plan tangent en* o *à la surface sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice de la surface au point* o.

4. La construction du n° 1 conduit à une démonstration très simple d'un théorème donné comme composition

en novembre 1885 aux examens de licence de la Faculté de Grenoble et dont voici l'énoncé :

Soit S *le lieu des centres de courbure des sections faites dans une surface par des plans passant par l'un de ses points o ; la transformée par rayons vecteurs réciproques de la surface* S, *o étant le pôle de la transformation et* $R_1 R_2$ *son module, est un cylindroïde lieu des perpendiculaires communes à la normale en o et aux normales infiniment voisines.*

Considérons, en effet, les sections passant par une tangente *ot* de la surface donnée qui fait l'angle φ avec la trace de la section principale dont le centre de courbure est γ_1. Le lieu des centres de courbure de ces sections est un cercle L, ayant *ol* pour diamètre et situé dans le plan normal perpendiculaire à *ot*.

Si nous rabattons ce cercle sur le plan de la figure en le faisant tourner autour de N, il se confondra avec le cercle construit sur *ol* comme diamètre et passera par le point *n*.

Mais on a

$$om.on = R_1 R_2;$$

donc la droite L_1 transformée de ce cercle dans l'inversion définie par l'énoncé est rabattue sur la droite *np*.

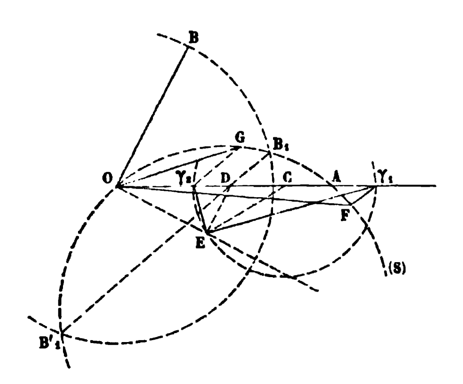
Or le point *p* est précisément le point central de la normalie dont le plan central est le plan du cercle L; donc la droite L_1 est perpendiculaire à la normale K au point central de cette normalie; elle est par suite une perpendiculaire commune à la normale N et à une normale infiniment voisine de la surface donnée.

D'ailleurs les droites K sont les génératrices d'un cylindroïde P; donc le lieu des droites L_1 est aussi un cylindroïde, qu'on obtient en faisant tourner P de 90° autour de son axe N.

5. Nous remarquerons enfin que le théorème du n° 2 conduit à des constructions très simples, toutes les fois qu'il y a lieu d'appliquer en Géométrie descriptive le théorème des tangentes conjuguées, par exemple lorsqu'on cherche la tangente à la courbe d'ombre d'une surface.

On en déduit aussi sans difficulté la construction suivante pour la détermination des axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués OA et OB.

Par les points O et A faisons passer un cercle (S) de rayon quelconque; du point O comme centre avec OB pour rayon, décrivons un cercle qui rencontre (S) aux points B_1 et B'_1; menons la droite $B_1B'_1$ qui coupe OA



au point D. Élevons en O une perpendiculaire sur OB et du point D abaissons sur cette droite une perpendiculaire DE. Enfin, du point milieu C de la droite DA, avec un rayon égal à CE, décrivons une circonférence qui rencontre OA aux points γ_1 et γ_2. Les axes cherchés sont parallèles aux droites $E\gamma_1$ et $E\gamma_2$ respectivement, et, si a et b sont les demi-axes, on a

$$a = \sqrt{OA.O\gamma_1}, \qquad b = \sqrt{OA.O\gamma_2}.$$

Pour obtenir sur la figure les longueurs a et b, menons par les points γ_1 et γ_2 des parallèles à $B_1 B'_1$, qui rencontrent le cercle (S) aux points F et G respectivement; on a

$$a = \mathrm{OF}, \qquad b = \mathrm{OG}.$$

SUR QUELQUES FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. E. CESARO.

Parmi les *Unsolved Questions* de M. Sylvester, publiées en appendice par l'*Educational Times,* nous allons considérer celle qui porte le n° **2906**. Il s'agit de chercher la valeur de la fraction continue

$$\mathrm{X} = (1, \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots).$$

Les termes a_n et b_n de la $n^{\text{ième}}$ réduite satisfont à l'équation

$$(1) \qquad c_{n+1} = \frac{1}{n}\, c_n + c_{n-1},$$

avec la condition initiale $c_1 = 1$, et l'on aura

$$c_n = a_n \quad \text{ou} \quad b_n,$$

suivant que $c_0 = 1$ ou 0.

Cela étant, considérons la fonction

$$(2) \qquad y = c_1 x + \tfrac{1}{2} c_2 x^2 + \tfrac{1}{3} c_3 x^3 + \tfrac{1}{4} c_4 x^4 + \ldots.$$

Elle obéit, en vertu de (1), à l'équation différentielle

$$(1 - x^2) y' = y + c_1 + c_0 x;$$

d'où l'on déduit aisément, par les méthodes habituelles,

$$(3) \quad y = (c_1 - c_0)\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1\right) + c_0 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \arcsin x.$$

Or, si l'on pose

$$(4)\qquad f(n) = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)},$$

on sait que

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + x + \frac{x^2+x^3}{f(1)} + \frac{x^4+x^5}{f(2)} + \frac{x^6+x^7}{f(3)} + \ldots,$$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ arc} \sin x = x + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) f(1) + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right) f(2) + \left(\frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}\right) f(3) + \ldots.$$

Par substitution dans (3) et comparaison avec (2), on trouve

$$c_n = (c_1 - c_0)\frac{n}{f\left[\frac{n}{2}\right]} + c_0 f\left[\frac{n}{2}\right].$$

En conséquence, si l'on fait successivement $c_0 = 1$, $c_0 = 0$, on obtient

$$a_n = f\left[\frac{n}{2}\right], \qquad b_n = \frac{n}{f\left[\frac{n}{2}\right]};$$

d'où l'on déduit que la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction considérée est

$$(5)\qquad X_n = \frac{1}{n} f^2\left[\frac{n}{2}\right].$$

D'autre part, on sait que l'expression (4) se réduit, pour n très grand, à $\sqrt{\pi n}$, abstraction faite d'un facteur variable, qui tend vers l'unité. On a donc, sensiblement,

$$X_n = \frac{\pi}{n}\left[\frac{n}{2}\right], \qquad \text{d'où} \qquad X = \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on fait usage de la formule de Stirling, on trouve

$$f^2(n) = \pi n + \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{8n} - \frac{1}{32n^2} - \ldots\right);$$

puis la formule (5) devient

$$(6)\qquad X_n = \frac{\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{4n}\left[1 + \frac{(-1)^n}{4n} - \frac{1}{8n^2} + \ldots\right].$$

On peut en déduire un développement analogue pour le $n^{\text{ième}}$ quotient complet Q_n. On a, en effet,

$$Q_n = \frac{X b_{n-1} - a_{n-1}}{a_n - X b_n} = \frac{b_{n-1}}{b_n}\,\frac{X - X_{n-1}}{X_n - X},$$

et, par suite, en vertu de (6),

$$Q_n = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + \ldots.$$

On voit que, pour n indéfiniment croissant, la fraction continue

$$Q_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \ldots\right)$$

tend vers l'unité. On résout ainsi la *Question* 2997 de l'*Educational Times*.

En partant de l'identité

$$X = X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + (X_4 - X_3) + \ldots,$$

on trouve la formule

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{2.4}{3.5}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{2.4.6}{3.5.7}\right)^2 + \ldots.$$

Si l'on observe que la somme des n premiers termes du second membre est X_{2n-1}, on reconnaît que l'erreur commise en s'arrêtant au $n^{\text{ième}}$ terme est sensiblement $\frac{\pi}{8n}$, pour de très grandes valeurs de n. On peut donc affirmer que la série obtenue est fort peu convergente.

Il est possible d'évaluer, plus généralement, la fraction

$$X(\mu) = \left(1, \frac{\mu}{1}, \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{3}, \frac{\mu}{4}, \ldots\right),$$

sans passer par le calcul des réduites successives. Remarquons d'abord que les termes de la $n^{\text{ième}}$ réduite satisfont à l'équation

$$(1-x^2)y' = \mu y + c_1 + c_0 x,$$

la fonction y étant toujours définie par l'égalité (2), où c_n représente indifféremment a_n ou b_n. Si l'on pose

$$\mathrm{J}(x, \mu) = \int_0^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{dx}{1-x},$$

on trouve sans peine

$$y = \frac{c_1 - c_0}{\mu}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} - 1\right] + c_0 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \mathrm{J}(x, \mu),$$

et l'on en déduit

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n x^n}{n} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \mathrm{J}(x, \mu), \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n x^n}{n} = \frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} - 1\right]. \end{cases}$$

Ces fonctions deviennent infinies pour $x = 1$. La limite de leur rapport, pour $x = 1$, ne diffère donc pas de la limite de $\frac{a_n}{b_n}$, pour n infini. Conséquemment

$$\mathrm{X}(\mu) = \mu \mathrm{J}(1, \mu) = \mu \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{dx}{1-x} = \mu \int_0^1 \frac{x^{\frac{\mu}{2}-1}\, dx}{1+x}.$$

Sous d'autres formes,

$$\begin{aligned} \mathrm{X}(\mu) &= 2\mu \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tang} x)^{\mu-1}\, dx \\ &= 2\mu \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+2} + \frac{1}{\mu+4} - \ldots\right). \end{aligned}$$

Quant aux réduites, on calcule d'abord b_n au moyen

de (7); puis, si l'on pose

$$\varepsilon_n = 1 - \mu\left(\frac{b_1}{1} - \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} - \ldots \pm \frac{b_{n-1}}{n-1}\right),$$

on a

$$J(x, \mu) = \varepsilon_1 x + \tfrac{1}{2}\varepsilon_2 x^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon_3 x^3 + \tfrac{1}{4}\varepsilon_4 x^4 + \ldots,$$

et, par suite,

$$a_n = \varepsilon_n + \mu n\left(\frac{b_1}{1}\,\frac{\varepsilon_{n-1}}{n-1} + \frac{b_2}{2}\,\frac{\varepsilon_{n-2}}{n-2} + \frac{b_3}{3}\,\frac{\varepsilon_{n-3}}{n-3} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{n-1}\,\frac{\varepsilon_1}{1}\right).$$

Prenons, comme exemple, le cas de $\mu = 2$. On a

$$\log 4 = \left(1, \tfrac{2}{1}, \tfrac{2}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{4}, \ldots\right).$$

Les termes de la $n^{\text{ième}}$ réduite sont

$$a_n = 2n\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots \pm \frac{1}{n-1}\right) \mp 1, \qquad b_n = n.$$

En conséquence,

$$X_n = 2\left\{H(n) - H\left[\frac{n}{2}\right]\right\} + \frac{(-1)^n}{n},$$

pourvu que l'on représente par $H(n)$ la somme des n premiers termes de la série harmonique. On en déduit, en vertu de formules connues,

$$X_n = \log 4 + (-1)^n\left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{2n^6} - \ldots\right);$$

puis, pour exprimer le $n^{\text{ième}}$ quotient complet,

$$Q^n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{2n^4} + \ldots.$$

On voit que la fraction dont il s'agit est plus convergente que celle de M. Sylvester.

Plus généralement encore, considérons la fraction

continue

$$X(\mu, \nu) = \left(1, \frac{\mu}{1+\nu}, \frac{\mu}{2+\nu}, \frac{\mu}{3+\nu}, \frac{\mu}{4+\nu}, \ldots\right).$$

En opérant comme plus haut, on trouve

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n x^{n+\nu}}{n+\nu} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \int_0^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{x^\nu dx}{1-x},$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n x^{n+\nu}}{n+\nu} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \int_0^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{x^\nu dx}{1-x^2}.$$

La valeur de $X(\mu, \nu)$ est donc égale au rapport des intégrales

$$\int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{x^\nu dx}{1-x}, \quad \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{x^\nu dx}{1-x^2}.$$

Par exemple, si l'on pose

$$S_\nu = \frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{2+\nu} + \frac{1}{3+\nu} - \frac{1}{4+\nu} + \ldots,$$

on a

$$X(2, \nu) = \frac{S_\nu}{\frac{1}{2} - \nu S_\nu} = 2 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} - \frac{3}{2\nu^4} + \ldots.$$

En particulier, lorsque ν est un nombre entier $n-1$, la dernière formule donne l'expression du $n^{\text{ième}}$ quotient complet de la fraction $\left(1, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right)$, considérée plus haut. Soit encore $\nu = \frac{1}{2}$: on trouve

$$\frac{2\pi}{\pi - 2} = \left(1, \frac{4}{1}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \ldots\right);$$

etc., etc.

C'est par des procédés semblables que l'on parvient

à calculer la fraction

$$Y(\mu,\nu) = 1 + \cfrac{\frac{\mu}{1+\nu}}{1 + \cfrac{\frac{\mu}{2+\nu}}{1 + \cfrac{\frac{\mu}{3+\nu}}{1 + \cfrac{\frac{\mu}{4+\nu}}{1+\dots}}}}$$

On obtient d'abord

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_{n-1}x^{n+\nu}}{n+\nu} = \frac{e^{-\mu x}}{(1-x)^{\mu}} \int_0^x x^{\nu}(1-x)^{\mu-1} e^{\mu x}\, dx,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_{n-1}x^{n+\nu}}{n+\nu} = \frac{e^{-\mu x}}{(1-x)^{\mu}} \int_0^x x^{\nu+1}(1-x)^{\mu-1} e^{\mu x}\, dx,$$

et l'on en déduit

$$Y(\mu,\nu) = \frac{\int_0^1 x^{\nu}\ (1-x)^{\mu-1} e^{\mu x}\, dx}{\int_0^1 x^{\nu+1}(1-x)^{\mu-1} e^{\mu x}\, dx}.$$

Exemples :

$$e - 1 = 1 + \cfrac{\frac{1}{1}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}}{1 + \cfrac{\frac{1}{4}}{1+\dots}}}},$$

d'où

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5+\dots}}}};$$

$$\frac{1}{2}(e^2-3)=1+\cfrac{\frac{2}{1}}{1+\cfrac{\frac{2}{2}}{1+\cfrac{\frac{2}{3}}{1+\cfrac{\frac{2}{4}}{1+\ldots}}}},$$

d'où

$$\frac{4}{e^2-5}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{4}{3+\cfrac{6}{4+\cfrac{8}{5+\ldots}}}}$$

Des fractions analogues ont été étudiées par Amoretti, Wronski, Legendre, etc.

SUR UNE DISTRIBUTION DE ZÉROS;

PAR M. E. CESARO.

Soient $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ les zéros de la fonction u, arbitrairement distribués dans le plan. Nous voulons étudier la distribution des zéros de $u'^2 - uu''$. Si les zéros de u sont simples, il est clair qu'il n'y en a pas qui appartiennent à $u'^2 - uu''$, et, par suite, l'équation à résoudre prend la forme

$$(1)\qquad \frac{1}{(z-c_1)^2}+\frac{1}{(z-c_2)^2}+\frac{1}{(z-c_3)^2}+\ldots+\frac{1}{(z-c_n)^2}=0.$$

Cela étant, posons

$$c_r = a_r + ib_r, \qquad z = x + iy;$$

x et y sont les coordonnées d'un zéro quelconque Q

de $u'^2 - uu''$. L'équation (1) se dédouble en

$$(2)\qquad \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(x-a_r)^2}{\delta_r^4} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(y-b_r)^2}{\delta_r^4},$$

$$(3)\qquad \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(x-a_r)(y-b_r)}{\delta_r^4} = 0,$$

δ_r étant la distance Qc_r. Si l'on charge les zéros de u en raison inverse de la quatrième puissance de leurs distances à Q, l'équation (3) montre que les parallèles aux axes, menées par Q, forment un couple d'axes d'inertie, principaux pour ce point. Mais, d'autre part, d'après l'équation (2), les moments d'inertie, relatifs à ces axes, sont égaux entre eux. Il en résulte que toute droite passant par Q est un axe principal pour ce point. Autrement dit : *le moment d'inertie d'un système de masses, appliquées aux zéros de u avec une intensité inversement proportionnelle à la quatrième puissance de leurs distances à un zéro de* $u'^2 - uu''$, *a une valeur constante relativement à tout axe passant par ce point.* Il est évident, d'ailleurs, que cette valeur constante n'est autre que la demi-somme des inverses des carrés des distances de Q aux zéros de u. Si l'on représente par ρ le rayon de giration, on a donc

$$(4)\qquad 2\rho^2 = \frac{\frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} + \frac{1}{\delta_3^2} + \ldots + \frac{1}{\delta_n^2}}{\frac{1}{\delta_1^4} + \frac{1}{\delta_2^4} + \frac{1}{\delta_3^4} + \ldots + \frac{1}{\delta_n^4}}.$$

Si les zéros de u sont alignés sur une droite D, celle-ci contient nécessairement le barycentre G du système de masses : elle est, en outre, pour ce point, un axe principal, par rapport auquel le moment d'inertie est *nul.* On sait que l'autre axe, perpendiculaire à D, doit passer par Q, et le rayon de giration correspondant,

représenté par la distance QG, est, d'autre part, égal à ρ, comme pour tout axe issu de Q. Conséquemment, *si, aux zéros de u, alignés sur une droite* D, *on applique des masses inversement proportionnelles aux quatrièmes puissances de leurs distances à un zéro* Q, *de* $u'^2 - uu''$, *le barycentre du système n'est autre que la projection de* Q *sur* D. En outre, *la distance de* Q *à* D *représente le rayon de giration du système, relativement à tout axe passant par* Q. La théorie des moments d'inertie permet enfin d'ajouter que, plus généralement, *le rayon de giration du système de masses, relativement à une droite quelconque du plan, est la distance de* G *à la projection de* Q *sur la droite considérée.*

D'après ce qui précède, on voit que *les zéros de* $u'^2 - uu''$ *sont toujours situés en dehors de la droite* D; car le rayon de giration ρ ne saurait être nul. En outre, il est clair que le symétrique Q′ de Q, par rapport à D, satisfait aux mêmes conditions que Q, puisque le système de masses, relatif à Q′, est identique avec celui qui se rapporte à Q. *Les* $2n - 2$ *zéros de* $u'^2 - uu''$ *sont* donc *symétriquement distribués de part et d'autre de la droite* D. Remarquons enfin que le maximum de l'expression (4) a lieu lorsque les quantités δ sont toutes égales à leur maximum d; d'où il suit que l'on a $2\rho^2 < d^2$. On déduit de là que *la distance* ρ *est certainement inférieure à l'intervalle qui sépare les zéros extrêmes.* Lorsque $n = 2$, on a

$$2\rho^2 = d^2,$$

et les zéros des deux fonctions sont les sommets d'un carré. En particulier, si l'on applique ce qui précède au cas où l'équation $u = 0$ n'a que des racines réelles, on voit que les racines de $u'^2 - uu'' = 0$ sont imaginaires,

et que, dans chacune d'elles, le coefficient de ι est, en valeur absolue, inférieur à l'excès de la plus grande sur la plus petite des racines de u.

Considérons, plus généralement, l'équation

$$u^2 + K^2(u'^2 - uu'') = 0,$$

K étant l'affixe d'un point quelconque du plan. Soit $K = Re^{i\theta}$. Si l'on pose

$$A = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(x-a_r)^2}{\delta_r^4},$$

$$B = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(y-b_r)^2}{\delta_r^4},$$

$$C = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(x-a_r)(y-b_r)}{\delta_r^4},$$

l'équation proposée se dédouble en

$$A - B = \frac{\cos 2\theta}{R^2}, \qquad 2C = \frac{\sin 2\theta}{R^2},$$

d'où

$$\tang 2\theta = \frac{2C}{A-B}.$$

Cette relation montre que *la parallèle à* OK, *passant par* Q, *est, pour ce point, un axe principal d'inertie.* Supposons, maintenant, que les zéros de u soient sur une droite D, parallèle ou perpendiculaire à OK. D'après ce que l'on vient de dire, les axes principaux, de centre Q, sont parallèles à D et à ses perpendiculaires, c'est-à-dire aux axes principaux de centre G. Or on sait que cela ne peut arriver, à moins que Q ne se trouve sur un de ces derniers axes. Donc, comme précédemment, *le barycentre du système de masses est la projection de* Q *sur* D, pourvu, nous le répétons, que le point K se trouve sur la parallèle ou sur la perpendiculaire à D,

issues de l'origine. Mais le zéro Q ne coïncide plus, comme dans le cas précédent, avec un des points P, P′, pour lesquels l'ellipse d'inertie se réduit à un cercle. Il y a, cependant, une liaison remarquable entre tous ces points. Observons d'abord que, si l'on décrit la circonférence sur le diamètre QP, les axes principaux, de centre Q, passent par les extrémités du diamètre qui contient G. D'après cette construction, si l'on observe que G est le milieu de PP′, on démontre sans peine que *les axes principaux d'inertie, relatifs au point* Q, *sont les tangentes communes à deux paraboles ayant pour foyers* P, P′, *et pour directrices* QP′, QP, *respectivement.*

Voici comment nous avons été conduit à nous occuper de ces questions. On sait que M. d'Ocagne a étudié l'équation symbolique

$$(5) \qquad u^{\nu} - (u - v)^{\nu} = 0,$$

où

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{d^{\nu} u^r}{dz^{\nu}},$$

en démontrant que, si ν est *pair,* l'équation dont il s'agit n'a que des racines imaginaires, lorsque l'équation $u = 0$ a toutes ses racines réelles et simples. Il est possible de ramener cette proposition à un degré extrême d'évidence, grâce à une remarquable formule, qui permet d'exprimer la $\nu^{\text{ième}}$ dérivée de $\log u$, moyennant les $\nu^{\text{ièmes}}$ dérivées des puissances successives de u. Cette formule est

$$\frac{d^{\nu} \log u}{dz^{\nu}} = \sum_{r=1}^{r=\nu} \frac{(-1)^{r-1} C_{\nu,r}}{r u^r} \frac{d^{\nu} u^r}{dz^{\nu}};$$

u représente une fonction quelconque de z. L'équation (5) devient donc

$$u^{\nu} \frac{d^{\nu} \log u}{dz^{\nu}} = 0,$$

ou bien, dans le cas actuel,

$$(6)\quad \begin{cases} (z-c_1)^\nu(z-c_2)^\nu\ldots(z-c_n)^\nu \\ \times\left[\dfrac{1}{(z-c_1)^\nu}+\dfrac{1}{(z-c_2)^\nu}+\ldots+\dfrac{1}{(z-c_n)^\nu}\right]=0. \end{cases}$$

Lorsque les nombres c sont réels, il est évidemment impossible de satisfaire à cette équation avec des valeurs réelles de z, si ν est *pair*.

Supposons, plus généralement, que les zéros c soient situés sur une droite D et, pour abréger, désignons par U_ν le premier membre de (6). Soient θ_r l'angle de Qc_r avec D, et δ_r la distance Qc_r. On ramène aisément l'équation (6) au couple d'égalités

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\cos\nu\theta_r}{\delta_r^\nu}=0,\qquad \sum_{r=1}^{r=n}\frac{\sin\nu\theta_r}{\delta_r^\nu}=0.$$

Remarquons que le symétrique de Q, par rapport à D, remplit les dernières conditions aussi bien que Q. *Le système des zéros de* U_ν *admet* donc *la droite* D *pour axe de symétrie*. La seconde égalité ne s'oppose pas à ce que tous les angles θ soient nuls; mais la première devient

$$(7)\quad \frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^\nu}+\frac{1}{(\lambda-\lambda_2)^\nu}+\frac{1}{(\lambda-\lambda_3)^\nu}+\ldots+\frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^\nu}=0,$$

λ_r et λ étant les abscisses, sur D, des points c_r et Q, par rapport à une origine arbitraire. Si ν est *pair*, il est impossible de satisfaire à (7), et, par suite, *les zéros de* U_ν *ne sont pas situés sur* D. On peut ajouter qu'il y a $(n-1)\frac{\nu}{2}$ de ces zéros situés du même côté de D, et que les autres sont les symétriques des premiers, par rapport à cette droite. Le cas de $\nu=2$ est celui que nous avons étudié au commencement de cette Note. Supposons, maintenant, que ν soit *impair*. On sait démontrer qu'il

y a $n - 1$ valeurs réelles de λ, vérifiant (7), et que chacune d'elles est isolée entre deux termes consécutifs de la série $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Donc, *si la fonction u a ses n zéros sur une droite* D, *$n - 1$ zéros de* U_ν *se succèdent sur la même droite, suivant la loi de Rolle, si* ν *est impair. Les autres zéros constituent* $(n-1)\frac{\nu-1}{2}$ *couples de points symétriques par rapport à* D. Le cas de $\nu = 1$ est fort connu; car $U_1 = u'$. Pour $\nu = 3$, et D coïncidant avec Ox, on voit que, si l'équation $u = 0$ a ses n racines réelles, l'équation $2u'^3 - 3uu'u'' + u^2u''' = 0$ a $n - 1$ racines réelles et $n - 1$ couples de racines imaginaires, etc.

Reprenons l'équation (7) en y supposant toujours ν impair, et tâchons de limiter la racine réelle de U_ν, comprise entre λ_r et λ_{r+1}. On trouve aisément, par un moyen connu,

$$r^{-\frac{1}{\nu}} < \frac{\lambda_{r+1} - \lambda}{\lambda - \lambda_r} < (n-r)^{\frac{1}{\nu}};$$

d'où, après avoir remplacé r par sa plus grande valeur $n - 1$,

$$(8) \qquad \lambda_r + \frac{\lambda_{r+1} - \lambda_r}{1 + (n-1)^{\frac{1}{\nu}}} < \lambda < \lambda_{r+1} - \frac{\lambda_{r+1} - \lambda_r}{1 + (n-1)^{\frac{1}{\nu}}}.$$

A plus forte raison

$$\lambda_r + \frac{\lambda_{r+1} - \lambda_r}{n} < \lambda < \lambda_{r+1} - \frac{\lambda_{r+1} - \lambda_r}{n}.$$

Donc, *si l'on partage en n segments égaux l'intervalle compris entre deux racines consécutives de u, on peut affirmer que* U_ν *ne s'annule pas dans les segments extrêmes*. Du reste, si $\nu > 1$, on peut déduire des inégalités (8) des limitations plus approchées. Par exemple, *si l'on partage en n segments égaux l'intervalle compris entre deux racines consécutives de u, la fonction* U_ν

ne peut s'annuler que dans les $n - 2s$ *segments moyens, dès que* n *cesse d'être inférieur à* $\frac{s}{2}(3 + \sqrt{4s - 3})$.
Ainsi, l'équation $u = 0$, de degré $n > 45$, n'ayant que des racines réelles et simples, si l'on partage en n segments égaux l'intervalle compris entre deux racines consécutives quelconques, la racine réelle de U_ν (ν *impair*), qui se trouve dans l'intervalle considéré, est nécessairement contenue par les $n - 20$ segments du milieu. Cette limitation peut être précisée davantage à mesure que ν croît. C'est ainsi que, dans le dernier énoncé, on peut remplacer $n - 20$ par $n - 44$ dès que ν surpasse 43. Remarquons, pour finir, que, *lorsque* ν *croît indéfiniment, les zéros de* U_ν, *situés dans les intervalles compris entre les zéros successifs de* u, *tendent vers les points milieux de ces intervalles.*

EXEMPLES DE FONCTIONS A ESPACES LACUNAIRES;

Par M. F. GOMES TEIXEIRA,
Professeur à l'École Polytechnique de Porto.

Le but de cette Note est de donner quelques exemples très simples de fonctions à espaces lacunaires.

Considérons premièrement la fonction $f(z)$ définie par la série

$$F(z) - \frac{1}{z-a} + (z-a-1)\left[\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{(z-a)^3} + \cdots\right],$$

où $F(z)$ représente une fonction continue sur tout le plan. Si le module de $z - a$ est plus grand que l'unité, nous avons

$$f(z) = F(z);$$

si le module de $z-a$ est plus petit que l'unité, nous avons

$$f(z)=\infty.$$

Donc la série précédente représente une fonction continue sur tout le plan, admettant comme espace lacunaire le cercle dont le centre est le point d'affixe a et dont le rayon est égal à l'unité.

De la même manière, la somme

$$f(z)=U_1+U_2+\ldots+U_n,$$

où

$$U_n=F_n(z)-\frac{1}{z-a_n}+(z-a_n-1)\left[\frac{1}{(z-a_n)^2}+\frac{1}{(z-a_n)^3}+\ldots\right]$$

et $F_1(z)$, $F_2(z)$, ... représentent des fonctions continues, est égale à

$$F_1(z)+F_2(z)+\ldots+F_n(z)$$

si les modules de $z-a_1$, $z-a_2$, ..., $z-a_n$ sont plus grands que l'unité ; et est égale à l'infini si quelqu'un de ces modules est plus petit que l'unité. Donc $f(z)$ est une fonction continue sur tout le plan, admettant comme espaces lacunaires les cercles dont les centres sont les points d'affixes a_1, a_2, ..., a_n, et dont les rayons sont égaux à l'unité. En disposant convenablement les centres des cercles, on peut former les espaces lacunaires les plus variés.

Si $n=\infty$ et si la série

$$U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots$$

est convergente, on obtient une fonction avec un nombre infini d'espaces lacunaires.

SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$;

PAR M. BALITRAND,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

M. Victor de Strékalof a donné (3e série, t. V, p. 533) une méthode qui permet de trouver simplement et brièvement l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$. Nous nous proposons, dans cette petite Note, d'appliquer ce procédé à la recherche de l'intégrale plus générale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$. Nous adopterons les notations de M. Victor de Strékalof et nous poserons avec lui

$$z = \operatorname{tang}\varphi, \qquad \text{d'où} \qquad dz = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

On a

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int (\cos^2\varphi)^n\, d(\operatorname{tang}\varphi)$$
$$= \operatorname{tang}\varphi \cos^{2n}\varphi - \int \operatorname{tang}\varphi\, d(\cos^{2n}\varphi).$$

Nous sommes donc ramené à la recherche de l'intégrale $\int \operatorname{tang}\varphi\, d(\cos^{2n}\varphi)$. Calculons la différentielle de $\cos^{2n}\varphi$:

$$d(\cos^{2n}\varphi) = -2n\cos^{2n-1}\varphi \sin\varphi\, d\varphi$$
$$= -2n\cos^{2n-1}\varphi\cos\varphi\operatorname{tang}\varphi\, d\varphi;$$

donc

$$\int \operatorname{tang}\varphi\, d(\cos^{2n}\varphi) = -2n\int \operatorname{tang}^2\varphi\cos^{2n}\varphi\, d\varphi,$$

ce qui peut s'écrire

$$-2n\int(1+\operatorname{tang}^2\varphi-1)\cos^{2n}\varphi\,d\varphi$$
$$=-2n\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi+2n\int\cos^{2n}\varphi\,d\varphi.$$

On voit donc que l'on obtient l'égalité

$$\int\cos^{2n}\varphi\,d(\operatorname{tang}\varphi)$$
$$=\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi$$
$$=\operatorname{tang}\varphi\cos^{2n}\varphi+2n\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi-2n\int\cos^{2n}\varphi\,d\varphi$$

ou bien

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned}\int\cos^{2n}\varphi\,d\varphi&=\frac{1}{2n}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2n}\varphi\\&\quad+\frac{2n-1}{2n}\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi.\end{aligned}\right.$$

Cette égalité ramène la recherche de l'intégrale $\int\cos^{2n}\varphi\,d\varphi$ à celle de l'intégrale $\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi$. Dans l'égalité (1), donnons à u les valeurs successives

$$n,\quad n-1,\quad n-2,\quad\ldots,\quad 2,\quad 1;$$

nous obtenons

$$\int\cos^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2n}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2n}\varphi+\frac{2n-1}{2n}\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi,$$
$$\int\cos^{2(n-1)}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2(n-1)}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2(n-1)}\varphi+\frac{2n-3}{2(n-1)}\int\cos^{2(n-2)}\varphi\,d\varphi,$$
$$\int\cos^{2(n-2)}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2(n-2)}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2(n-2)}\varphi+\frac{2n-5}{2(n-2)}\int\cos^{2(n-3)}\varphi\,d\varphi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\int\cos^{2(n-p+1)}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2(n-p+1)}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2(n-p+1)}\varphi$$
$$+\frac{2n-2p+1}{2(n-p+1)}\int\cos^{2(n-p)}\varphi\,d\varphi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\int\cos^{2}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2}\varphi+\frac{1}{2}\varphi.$$

De cette série d'égalités, on déduit facilement

$$\int \cos^{2n}\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2n}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2n}\varphi + \frac{1}{2(n-1)}\frac{2n-1}{2n}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2(n-1)}\varphi$$

$$+ \frac{1}{2(n-2)}\frac{(2n-1)(2n-3)}{2n.2(n-1)}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2(n-2)}\varphi + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2(n-p)}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)}{2n.2(n-1)\ldots 2(n-p+1)}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2(n-p+1)}\varphi + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n.2(n-1)\ldots 4.2}\operatorname{tang}\varphi\cos^{2}\varphi$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n.2(n-1)\ldots 4.2}\varphi + \text{const.}$$

On trouve finalement, en remplaçant $\cos^2\varphi$ et $\operatorname{tang}\varphi$ par leurs valeurs,

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2n}\frac{z}{(1+z^2)^n} + \frac{1}{2(n-1)}\frac{2n-1}{2n}\frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2(n-p)}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)}{2n.2(n-1)\ldots 2(n-p+1)}\frac{z}{(1+z^2)^{n-p+1}} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n.2(n-1)\ldots 4.2}\frac{z}{1+z^2}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n.2(n-1)\ldots 4.2}\operatorname{arc\,tang} z + \text{const.}$$

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices élémentaires de Géométrie analytique a deux et a trois dimensions avec un exposé des méthodes de résolution, suivis des énoncés des problèmes donnés pour les compositions d'admission aux Écoles Polytechnique, Normale et Centrale, et au Concours général ; par M. *A. Rémond,* ancien élève

de l'École Polytechnique, licencié ès Sciences, professeur de Mathématiques spéciales à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

PREMIÈRE PARTIE : *Géométrie à deux dimensions.* 1 vol. in-8° de VIII-319 pages, avec figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars, 1887. Prix : 8^fr.

L'écueil où viennent échouer nombre de candidats aux examens qui portent sur les Mathématiques, c'est le *problème!* Un élève studieux arrive toujours à se tirer de la *question de Cours.* Il la comprend plus ou moins bien, et l'expose de même, mais enfin, s'il a travaillé, il ne risque pas de rester tout à fait coi. Pour le *problème*, c'est autre chose. Si l'élève ne s'y est pas exercé beaucoup et avec effort, s'il n'est pas en possession d'une bonne méthode, il court le risque de se troubler lorsqu'il subit les épreuves d'entrée à nos Écoles, et de ne pouvoir même indiquer le commencement de la marche à suivre. Une bonne préparation doit donc accorder une place importante aux exercices.

Pour répondre à ce besoin, M. Rémond vient de publier un Livre qui, selon nous, est appelé à rendre de grands services. Disons-le tout de suite : ce Livre ne fait pas double emploi avec la publication similaire de M. Kœhler, que nous signalions ici même, il y a quelque temps (¹). Les deux Ouvrages sont, par essence, tout à fait différents. Celui de M. Kœhler s'adresse aux étudiants qui, soit pour préparer l'Agrégation et faire du professorat, soit pour se livrer à des recherches originales, ne veulent point se confiner dans les limites assignées par les programmes officiels et s'assimilent la Science pour elle-même. Le Livre de M. Rémond a un autre but plus immédiat, la préparation aux examens. Il complète le Cours de Mathématiques spéciales, et sert, pour ainsi dire, d'introduction au travail de M. Kœhler.

L'Auteur ne cherche pas à présenter des problèmes plus ou moins élégants, se prêtant à des solutions plus ou moins ingénieuses; il s'attache, avant tout, à *former l'esprit de l'élève*, en développant les méthodes générales propres à le mener le plus sûrement au but.

(¹) *Nouv. Ann.*, 3e série, t. V, p. 53 ; 1886.

M. Rémond, qui a puisé la plupart de ses exemples dans les compositions mêmes d'entrée aux diverses Écoles, passe en revue les difficultés de tout genre qui se présentent aux élèves dans les problèmes, et il les résout par les moyens les plus élémentaires, les plus naturels, sans jamais chercher à les tourner par des artifices plus ou moins subtils.

Il proscrit ce que, dans le langage des classes de Mathématiques spéciales, on appelle les *ficelles*, ces petits tours de passe-passe qui conduisent directement au résultat final, mais qui s'appliquent seulement à un problème déterminé. Certes, on peut obtenir ainsi des solutions élégantes qui charment l'esprit des personnes arrivées à un certain degré de culture mathématique ; mais, nous le répétons, le commençant doit avant tout s'initier aux méthodes générales.

Le Livre de M. Rémond est donc, à notre avis, écrit dans un très bon esprit, et il portera ses fruits. Il ne s'écarte pas du domaine limité par les programmes officiels et ne fait pas appel à d'autres théories que celles qui sont partout et couramment enseignées, mais il en tire un excellent parti.

La ligne droite, le cercle et les coniques font tous les frais de la première Partie de ces *Exercices élémentaires ;* mais ce sont ces matières qui fournissent surtout le sujet des compositions d'entrée à nos grandes Écoles.

L'Ouvrage est séparé en Chapitres qui répondent aux divisions principales du Cours : *Ligne droite, Cercle, Discussion des coniques, Tangentes, Normales, Centre, Diamètres conjugués, Axes et Sommets, Enveloppes, Pôle et Polaire, Foyers, Détermination des coniques.*

Dans un premier Chapitre, l'auteur, sous le titre de *Préliminaires,* expose certaines généralités sur les lieux géométriques et sur l'élimination qui font entrevoir la marche à suivre pour la résolution des problèmes de Géométrie analytique et ressortir certaines règles applicables d'une manière générale.

En outre, chaque Chapitre est précédé d'un rappel succinct de résultats, qui met sous les yeux du lecteur les formules extraites du Cours et qui se rapportent à la matière du Chapitre.

La seconde Partie, qui paraîtra prochainement, est consacrée à la Géométrie analytique à trois dimensions ; elle se termine par un très utile Appendice donnant les énoncés de

toutes les questions proposées pour l'admission à l'École Polytechnique et à l'École Normale depuis 1850, au Concours général depuis la même époque, et pour l'admission à l'École Centrale depuis 1866.

Que les jeunes gens qui se préparent aux examens des diverses écoles étudient ce Livre avec soin, *la plume ou la craie à la main*, qu'ils en méditent les excellents préceptes, et nous leur garantissons le succès pour prix de leurs efforts. Quant au Livre lui-même, exécuté avec le soin que la maison Gauthier-Villars apporte dans toutes ses publications, nous lui garantissons une bonne et prompte renommée. Nous le croyons vraiment appelé à devenir un *Livre classique*, et nous ne serions pas étonné d'en voir annoncer prochainement une seconde édition.

MAURICE D'OCAGNE.

LE POTENTIEL THERMODYNAMIQUE ET SES APPLICATIONS A LA MÉCANIQUE CHIMIQUE ET A L'ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES; par M. *P. Duhem*, ancien élève de l'École Normale supérieure. Grand in-8° de XII-248 pages. Paris, A. Hermann; 1886. Prix : 10^{fr}.

Les travaux de M. Massieu, de M. Gibbs et de M. Helmholtz ont mis en évidence les fonctions qui peuvent jouer le rôle de potentiel thermodynamique. En outre, M. Gibbs, en faisant usage des propriétés de ces fonctions dans l'étude de la dissociation des composés gazeux, et M. Helmholtz, en appliquant ces mêmes propriétés à l'interprétation des phénomènes thermiques qui se manifestent dans la pile voltaïque, ont montré la fécondité du nouveau moyen de recherche dont ils venaient d'enrichir la théorie mécanique de la chaleur. M. Duhem s'est donc proposé de nous exposer la théorie du potentiel thermodynamique et ses principales applications.

La première Partie de son Livre a pour objet de montrer l'état actuel de cette théorie. On y voit tout d'abord comment les idées introduites en Thermodynamique par M. Clausius conduisent presque immédiatement au théorème sur lequel repose l'emploi du potentiel thermodynamique. Avant d'examiner l'usage que les physiciens qui ont découvert ce théorème en ont fait pour la démonstration de propositions nouvelles,

l'auteur en expose l'application à quelques questions déjà étudiées par d'autres méthodes; il choisit pour cela les propriétés des courbes des tensions de vapeur, propriétés que M. Moutier a établies par la considération des cycles non réversibles, et l'étude de la vapeur émise par les dissolutions salines, étude déjà faite par M. Kirchhoff au moyen de l'énergie. Ces deux applications de la méthode nouvelle à des questions déjà résolues nous montrent qu'elle ne le cède ni en simplicité ni en généralité aux anciennes méthodes de la Théorie mécanique de la chaleur.

L'auteur aborde alors l'exposé des applications qui ont été faites de la théorie du potentiel thermodynamique, soit à l'étude de la dissociation des composés gazeux par M. Gibbs, soit à l'étude de la pile voltaïque par M. Helmholtz.

Dans les autres Parties de l'Ouvrage, l'auteur tente quelques applications nouvelles de la théorie du potentiel thermodynamique à la Mécanique chimique et aux phénomènes électriques.

Bulletin scientifique de l'enseignement secondaire spécial, à l'usage des élèves de 4e, 5e et 6e année, et des candidats aux examens et concours de cet enseignement, rédigé par M. *Ernest Lebon*, professeur agrégé au Lycée Charlemagne, avec la collaboration d'une Société de professeurs. In-8°, mensuel. Paris, Colin et Cie, 1886. Prix : 6^{fr} par an.

Cette publication doit surtout s'occuper des parties élémentaires des Sciences mathématiques et physiques. Nous recommandons le *Bulletin scientifique*, car nous pensons qu'il est appelé à rendre de grands services aux élèves et aux personnes qui préparent les grades de cet enseignement.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Annuaire pour l'an 1887, publié par le Bureau des Longitudes; contenant les Notices suivantes : *La Pho-*

tographie astronomique à l'observatoire de Paris et la Carte du ciel, par l'amiral *Mouchez.* In-18 de 890 pages, avec figures dans le texte, deux nouvelles Cartes magnétiques et trois planches hors texte, dont deux en héliogravure. Paris, Gauthier-Villars; 1887. Prix : $1^{fr},50$.

TRAITÉ DE STÉRÉOTOMIE (CHARPENTE ET COUPE DES PIERRES); texte et dessins; par M. *Jules Pillet,* professeur à l'École des Beaux-Arts. Grand in-4. Paris, Delagrave; Leipzig, Le Soudier; 1887. Prix : 12^{fr}.

A SYNOPSIS OF ELEMENTARY RESULTS IN PURE MATHEMATICS; containing propositions, formulæ and methods of Analysis, with abridged demonstrations. Supplemented by an Index to the papers of pure Mathematics which are to be found in te principal Journals and Transactions of learned Societies, both english and foreign, of the present century; by *G.-S. Carr,* M. A. Grand in-8, XXXVI-936 pages, avec 193 figures. Londres, F. Hodgson; 1886. Prix : $39^{fr},45$.

THÉORIE DU POTENTIEL ET SES APPLICATIONS A L'ÉLECTROSTATIQUE ET AU MAGNÉTISME; par M. *Émile Mathieu,* professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. IIe Partie : Électrostatique et Magnétisme. In-4° de VI-236 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1886. Prix : 12^{fr}.

LA STATIQUE GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS; par M. *Maurice Lévy,* Membre de l'Institut. 2e édition, IIe Partie : Flexion plane, lignes d'influence, poutres droites. Gr. in-8° de XIV-345 pages, avec figures dans le texte et un Atlas de 6 planches. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Prix : 15^{fr}.

L'ADDITION DE 10000 CHIFFRES PAR MINUTE. Deux méthodes nouvelles d'addition à la portée de tout le monde; par M. *Michel Laporte.* In-8°. Bordeaux, chez l'auteur, rue Mouneyra, 71; 1886. Prix : $0^{fr},90$.

Cours de Physique a l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales; par M. *H. Pellat,* maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris. T. II, 2e Partie; Optique géométrique. Paris, Paul Dupont; 1886. Prix : 8fr.

Traité d'Électricité et de Magnétisme; par *J. Clerk Maxwell.* Traduit de l'anglais, sur la 2e édition, par M. *G. Séligmann-Lui,* ingénieur des Télégraphes, avec Notes et éclaircissements; par MM. *Cornu, Potier* et *Sarrau,* professeurs à l'École Polytechnique. T. II, Ier fascicule. Paris. Gauthier-Villars; 1887. Prix de l'Ouvrage complet : 25fr.

L'aurore boréale. Étude générale des phénomènes produits par les courants électriques de l'atmosphère; par M. *S. Lemström,* professeur à l'Université d'Helsingfors. Grand in-8°, avec figures dans le texte et 14 planches, dont 5 en chromolithographie. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Prix : 6fr,50.

Représentation géométrique des coniques et quadriques imaginaires; par M. *Gaston Tarry.* In-8°, avec figures. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Prix : 1fr,50.

Sur quelques systèmes de tiges articulées, tracé mécanique de ces lignes; par M. *J. Neuberg,* professeur à l'Université de Liège. In-8°, de 48 pages avec 37 figures. Liège, G. Bertrand; 1886.

Étude sur la méthode suivie par Archimède pour déterminer approximativement le rapport de la circonférence au diamètre, suivie d'un procédé élémentaire pour résoudre la même question; par M. *L. Maleyx.* In-8° de 36 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Prix : 1fr,25.

Traité d'Algèbre, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement; par M. *H. Laurent,* examinateur

d'admission à l'École Polytechnique. 4e édition, en harmonie avec les nouveaux programmes, revue par M. *J.-H. Marchand*. IIe Partie, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales. In-8°, de 252 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1887. Prix : 4^{fr}.

Géométrie appliquée, rédigée conformément au programme des Écoles Normales primaires et du brevet supérieur; par M. *E. Lebon*, professeur au Lycée Charlemagne. In-12 cartonné. Paris, Delalain; 1886. Prix : 3^{fr},50.

Rivista di artigliera e genio. T. IV, octobre. Rome, Comité d'artillerie; 1886.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo. I : 3. Palermo, al Tesoriere del Circolo. Prezzo d'abbonamento per ogni Volume : Lire 9.

TIRAGES A PART.

Extension à l'hyperespace de la méthode de M. Carl Neumann pour la résolution de problèmes relatifs aux fonctions de variables réelles qui vérifient l'équation différentielle $\Delta F = 0$. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris; par M. C. Riquier. Paris, A. Hermann; 1886.

Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris; par M. G. Robin. Paris, Gauthier-Villars; 1886.

Sur une transformation géométrique générale dont un cas particulier est applicable à la Cinématique; par M. Ed. Dewulf. Extrait des *Annales de l'École Normale supérieure*, t. III, 3e série; 1886.

Écoulement varié des gaz; par M. Haton de la Goupillière. Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CIII; 1886.

Sur l'étude des événements arithmétiques; par M. E. Cesaro. Extrait des *Mémoires couronnés et des Mémoires des Savants étrangers de l'Académie de Belgique,* t. XLVII; 1886.

Intorno a taluni gruppi di operazioni. Nota di E. Cesaro. Extrait des *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei;* 1886.

Fonctions énumératrices. Note de M. E. Cesaro. Extrait des *Annali di Matematica pura ed applicata,* serie IIª, t. XIVº; 1886.

Source d'identités; Remarques sur une formule de Newton; et *Théorème d'Algèbre;* par M. E. Cesaro. Extraits de *Mathesis,* t. VI; 1886.

Sur les sous-invariants des formes binaires; Sur certaines suites de fractions irréductibles; Sur une suite de polygones, tels que chacun d'eux soit formé en joignant les milieux des côtés du précédent; Sur les courbes isométriques; par M. M. d'Ocagne. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles;* 1885 et 1886.

Sur un problème de limite; Transformation des propriétés barycentriques au moyen de la méthode des polaires réciproques; par M. M. d'Ocagne. Extraits de *Mathesis,* t. VI, 1886.

Monographie de la symédiane; Sur une quartique unicursale; par M. M. d'Ocagne. Extraits du *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales;* 1886.

Sur certaines déterminations de limites, moyennes limites de deux nombres; Étude de Géométrie segmentaire; par M. M. d'Ocagne. Extraits du *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas;* 1886.

Sur une suite récurrente; par M. M. d'Ocagne. Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XIV, 1886.

Compte rendu du Cours d'Algèbre supérieure de J.-A. Serret; par M. M. d'Ocagne. Extrait de la *Revue des questions scientifiques;* 1886.

Étude géométrique sur l'ellipse, applications au tracé des joints dans les voûtes elliptiques; par M. M. d'Ocagne. Paris, Baudoin; 1886.

Teoremi geometrici. Nota di G. Pirondini. Parma, L. Battei; 1886.

Intégration de certaines suites récurrentes; par M. G. de Longchamps. Extrait du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* 1885.

Notice sur Savin Realis. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Turin;* 1886.

Quelques théorèmes d'énumération géométrique; par M. S. Rindi. Extrait du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* 1885.

Delle sollecitazioni dinamiche nei sistemi elastici articolati. Nota del prof. Udalrigo Masoni. Extrait des *Atti del R. Istituto d'incoraggiamento;* 1886.

Propriétés générales des cercles de Tücker; par M. E. Vigarié. Extrait du *Journal de Mathématiques élémentaires;* 1886.

Sur la tension superficielle dans la théorie de la capillarité; par le P. J. Delsaulx. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles;* 1886.

Lettre à M. Ch. Brisse; par M. Catalan. Extrait de *Mathesis;* 1886.

Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementäre algebraische Fragen; Ein Satz über Discriminanten-Formen; von L. Kronecker. Extraits du *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. 99 et 100.

BACHET, sieur de MÉZIRIAC. — Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. 5ᵉ édition, revue, simplifiée et augmentée par *A. Labosne*, Professeur de Mathématiques. Petit in-8, caractères elzévirs, titre en deux couleurs; 1884.

Tirage sur papier vélin .... 6 fr.
Tirage sur papier vergé .... 8 fr.

BOSET, Professeur de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Namur. — **Traité de Géométrie analytique**, précédé des *Éléments de la Trigonométrie rectiligne et sphérique*. In-8, avec 322 figures dans le texte; 1878 .... 12 fr.

BOSET, Professeur honoraire de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Bruxelles. — **Traité élémentaire d'Algèbre**. Un fort volume in-8; 1880 .... 7 fr. 50 c.

LAURENT (H.), Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique. — **Traité d'Algèbre**, à l'usage des Candidats aux Écoles du Gouvernement. 4ᵉ édition, revue et mise en harmonie avec les nouveaux programmes. 3 volumes in-8; 1887.

Iʳᵉ Partie : **Algèbre élémentaire**, à l'usage des *Classes de Mathématiques élémentaires* .... 4 fr.

IIᵉ Partie : **Analyse algébrique**, à l'usage des *Classes de Mathématiques spéciales* .... 4 fr.

IIIᵉ Partie : **Théorie des équations**, à l'usage des *Classes de Mathématiques spéciales* .... 4 fr.

LUCAS (Ed.), Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. — **Récréations mathématiques**. 2 volumes petit in-8, caractères elzévirs, titre en deux couleurs.

Tome I (1882) : *Les Traversées. — Les Ponts. — Les Labyrinthes. — Les Reines. — Le Solitaire. — La numération. — Le Baguenaudier. — Le Taquin.*

Tome II (1883) : *Qui perd gagne. — Les Dominos. — Les Marelles. — Le Parquet. — Le Casse-Tête. — Les Jeux de Demoiselles. — Le Jeu icosien d'Hamilton.*

Chaque volume se vend séparément :

Tirage sur papier vélin .... 7 fr. 50 c.
Tirage sur papier hollande .... 12 fr.

RÉMOND (A.), Ancien Élève de l'École Polytechnique, Licencié ès Sciences, Professeur de Mathématiques spéciales à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. — **Exercices élémentaires de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions**, avec un Exposé des méthodes de résolution, suivis des *Énoncés de problèmes donnés pour les compositions d'admission aux Écoles Polytechnique, Normale et Centrale, et au Concours général*. 2 volumes in-8, avec figures dans le texte, se vendant séparément :

Iʳᵉ Partie : *Géométrie à deux dimensions*; 1887 .... 8 fr.
IIᵉ Partie : *Géométrie à trois dimensions. Énoncés* .... (*Sous presse.*)

SALMON (G.), Professeur au Collège de la Trinité, à Dublin. — **Traité d'Algèbre supérieure**. 2ᵉ édition française, publiée d'après la 4ᵉ édition anglaise, par *O. Chemin*. In-8; 1886. Un premier fascicule a paru. Prix de l'Ouvrage entier pour les souscripteurs .... 9 fr.

TABLE DES MATIÈRES.

Janvier 1887.

Pages.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME SÉRIE.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

FÉVRIER 1887.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, rue Hallé, 32 et 34,
ou à M. BRISSE, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine).
(AFFRANCHIR.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

Ce Recueil paraît chaque mois.

Par application de la loi du 7 avril 1879, tous les bureaux de poste de France, d'Algérie, de Belgique, de Danemark, d'Italie, de Norvége, des Pays-Bas, de Suède et de Suisse sont autorisés à recevoir les abonnements. L'Éditeur des *Nouvelles Annales de Mathématiques* prend à sa charge la remise perçue par l'Administration, et il suffit de verser à un bureau de poste, sans frais supplémentaires, le montant de l'abonnement.

PROBLÈMES DE PHYSIQUE DE MÉCANIQUE, DE COSMOGRAPHIE, DE CHIMIE,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX BACCALAURÉATS ÈS SCIENCES, AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL, ET AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT;

PAR EDME JACQUIER,

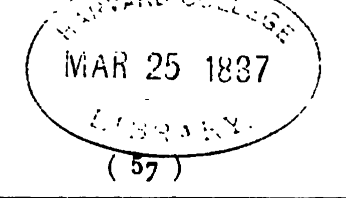
Licencié ès sciences mathématiques et physiques, Professeur de l'Université,
Officier de l'Instruction publique,
Membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique.

UN BEAU VOLUME IN-8, AVEC 68 FIGURES; 1884. — PRIX : 6 FR.

AVERTISSEMENT.

Cet Ouvrage est destiné aux candidats qui veulent aborder avec sûreté les compositions de Physique. La résolution des problèmes est un exercice indispensable à l'intelligence des théories elles-mêmes; sans cet exercice, on court le risque de se faire illusion sur son propre savoir, et sur un trop léger bagage de physique amusante.

Ce n'est pas qu'on ne puisse donner des conseils généraux pour la résolution d'un problème quelconque. Toute hypothèse, toute opération particulière, doit s'exprimer au moyen d'une équation; lorsque l'énoncé est ainsi analysé et traduit en calcul, le reste est l'affaire de l'Algèbre, puis de l'Arithmétique, qui se rencontre à la base et au sommet de chaque science. Lorsqu'on est parvenu à la formule, ou à l'équation finale, par la méthode technique, uniforme, lente et sûre, on peut souvent l'interpréter par une vue directe, par une intuition claire de la question, à laquelle on ne s'est pas élevé du premier abord : c'est la meilleure des vérifications, lorsqu'elle



NOTE SUR LA COURBURE DES LIGNES GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION;

PAR M. H. RESAL.

1. La formule que je vais établir est peut-être connue, mais je n'en ai trouvé de trace nulle part.

Soient

Oy l'axe de révolution;

m l'intersection d'une ligne géodésique donnée avec une courbe méridienne;

$R' = \overline{mN}$ la portion de la normale à cette courbe limitée à Oy;

R le rayon de courbure de la même courbe, considéré comme positif ou négatif selon qu'il aura ou non le même sens que $\overline{mN}$;

α l'inclinaison en m de la ligne géodésique sur la méridienne;

Ox un axe coordonné compris dans le plan yNm, perpendiculaire à Oy, la position de l'origine O restant indéterminée;

ρ le rayon de courbure en m de la ligne géodésique, et dont le signe déterminera le sens.

On a d'abord

$$(1) \qquad \frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'} = \frac{1}{\rho}.$$

Je considérerai la ligne géodésique comme étant décrite par un point matériel soustrait à l'action de toute force extérieure, assujetti à rester sur la surface. D'après l'équation des forces vives, la vitesse v du mobile est

constante et le principe des aires donne

$$v \sin\alpha\, x = \text{const.},$$

ou, en désignant par x_0, α_0 les valeurs de x, α qui se rapportent à un point déterminé de la ligne géodésique,

$$(2) \qquad x \sin\alpha = x_0 \sin\alpha_0 = \text{K}.$$

En éliminant α entre les équations (1) et (2), on trouve pour la formule cherchée

$$(3) \qquad \frac{x^2}{\text{R}} + \left(\frac{1}{\text{R}'} - \frac{1}{\text{R}}\right)\text{K}^2 = \frac{x^2}{\rho}.$$

On tirera de cette formule des conséquences plus ou moins intéressantes lorsque la courbe méridienne sera une cycloïde, une chaînette, ou sera telle que

$$\frac{1}{\text{R}} + \frac{1}{\text{R}'} = \text{const.}$$

Mais je ne m'arrêterai qu'à l'application suivante.

2. *Surfaces de révolution du second degré.* — Soit

$$\text{A}x^2 + \text{B}y^2 = 1$$

l'équation de la courbe génératrice : on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\text{A}x}{\text{B}y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\text{A}}{\text{B}^2y^3}(\text{A}x^2 + \text{B}y^2) = -\frac{\text{A}}{\text{B}^2y^3};$$

on déduit de là

$$\pm\frac{1}{\text{R}^1} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\text{AB}}{(\text{A}^2x^2 + \text{B}^2y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\pm\frac{1}{\text{R}'} = \frac{\dfrac{dy}{dx}}{x\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\text{A}}{(\text{A}^2x^2 + \text{B}^2y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

1° *Ellipsoïde.* — On posera $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$ et l'on aura

(4) $$\frac{1}{R} = \frac{a^4 b^4}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

(4') $$\frac{1}{R'} = \frac{b^2}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

d'où

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{b^2(b^4 x^2 + a^4 y^2 - a^4 b^2)}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, en éliminant y^2 au numérateur au moyen de l'équation de l'ellipse,

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{b^4(b^2 - a^2)x^2}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)} = \frac{1}{a^4} \frac{(b^2 - a^2)x^2}{R}.$$

La formule (3) devient alors

(5) $$\frac{1}{R}\left[1 + \frac{K^2(b^2 - a^2)}{a^4}\right] = \frac{1}{\rho}.$$

Il suit de là que *le rapport du rayon de courbure en un point de la ligne géodésique au rayon de courbure de l'ellipse méridienne menée par ce point est constant.* Ce théorème, qui paraît être dû à Gudermann (*Journal de Crelle*, t. 17), s'étend, comme on va le voir, aux autres surfaces de révolution du second degré.

2° *Paraboloïde.* — Si l'on pose $\frac{a^2}{b} = p$, puisque l'on suppose $a = \infty$, la formule (5) donne, pour le paraboloïde,

(6) $$\frac{1}{R}\left(1 + \frac{K^2}{p^2}\right) = \frac{1}{\rho}.$$

3° *Hyperboloïde à une nappe.* — On devra prendre $A = \frac{1}{a^2}$, $B = -\frac{1}{b^2}$. Les équations (4) et (4') s'appli-

quent ici; mais il faudra changer le signe du second membre de la première; on trouve ainsi

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{b^2}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}(b^4x^2 + a^4y^2 + a^4b^2)$$

$$= \frac{b^4}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}(a^2 + b^2)x^2 = -\frac{1}{a^4}\frac{(a^2 + b^2)x^2}{R},$$

et la formule (3) devient

$$(7) \qquad \frac{1}{R}\left[1 - \frac{K^2(a^2 + b^2)}{a^4}\right] = \frac{1}{\rho}.$$

4° *Hyperboloïdes à deux nappes.* — Les formules (4) et (4′) ne changent pas et l'on a

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{b^2(b^4x^2 + a^4y^2 - a^4b^2)}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{b^4(a^2 + b^2)}{(b^4x^2 + a^4y^2)} x^2 = \frac{(a^2 + b^2)x^2}{a^4 R},$$

et enfin la formule (3) donne

$$(8) \qquad \frac{1}{R}\left[1 + \frac{K^2(a^2 + b^2)}{a^4}\right] = \frac{1}{\rho}.$$

SUR LA LIMITE DE $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ QUAND m AUGMENTE INDÉFINIMENT;

PAR M. CH. BIEHLER.

---

1. Nous supposerons dans ce qui suit que m est entier et positif et nous considérerons d'abord le cas où x est

réel et positif. Tant que m est fini, on peut écrire

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x}{1.2}$$
$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{m!}.$$

On sait que, si $a, b, c, \ldots, l$ sont des nombres positifs moindres que l'unité, on a les inégalités

$$1>(1-a)(1-b)\ldots(1-l)>1-(a+b+\ldots+l),$$

et, en appliquant ce théorème aux quantités $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots,$ on aura, pour toute valeur de p inférieure à m,

$$1>\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)>1-\frac{p(p-1)}{2m}$$

et, par suite,

$$\frac{x^p}{p!}>\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\frac{x^p}{p!}$$
$$>\frac{x^p}{p!}-\frac{x^2}{2m}\frac{x^{p-2}}{(p-2)!}.$$

On peut donc former le tableau suivant :

$$\frac{x^2}{2!}>\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{2!}=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^2}{2m},$$
$$\frac{x^3}{3!}>\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{3!}>\frac{x^3}{3!}-\frac{x^2}{2m}\frac{x}{1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{x^m}{m!}>\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{m!}>\frac{x^m}{m!}-\frac{x^2}{2m}\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}.$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités, après avoir ajouté à tous les membres la quantité $1+\frac{x}{1}$, et en posant, pour abréger,

$$e_m(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^m}{m!},$$

il viendra

$$e_m(x) > \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m > e_m(x) - \frac{x^2}{2m} e_{m-2}(x);$$

la fonction $e_m(x)$ a pour limite, quand m croît indéfiniment, la série convergente

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \ldots,$$

que nous désignerons par $e(x)$.

Les inégalités précédentes nous montrent que

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

est compris entre deux quantités

$$e_m(x) \quad \text{et} \quad e_m(x) - \frac{x^2}{2m} e_{m-2}(x),$$

qui ont toutes deux pour limite $e(x)$ quand m augmente indéfiniment; par suite,

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

a aussi pour limite $e(x)$.

2. Supposons maintenant que x soit une quantité quelconque négative ou imaginaire; nous allons démontrer que $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ a encore pour limite $e(x)$.

A cet effet, formons la différence

$$e_m(x) - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m.$$

Nous allons montrer que le module de cette différence peut devenir plus petit que toute quantité donnée quand m

croît indéfiniment. On a évidemment

$$e_m(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$
$$=\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\right]\frac{x^2}{1.2}+\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\right]\frac{x^3}{3!}+\ldots$$
$$+\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\right]\frac{x^m}{m!};$$

si l'on désigne par r le module de x, le module du second membre étant inférieur à la somme des modules de ses termes, on a

$$\text{mod}\left[e_m(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right]<\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\right]\frac{r^2}{1.2}$$
$$+\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\right]\frac{r^3}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\right]\frac{r^m}{m!}$$

ou bien

$$\text{mod}\left[e_m(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right]<e_m(r)-\left(1+\frac{r}{m}\right)^m.$$

Or nous avons démontré que, pour toute valeur de r positive,

$$e_m(r)>\left(1+\frac{r}{m}\right)^m>e_m(r)-\frac{r^2}{2m}\,e_{m-2}(r);$$

si l'on retranche les trois membres de cette double inégalité de la même quantité $e_m(r)$, il viendra

$$0<e_m(r)-\left(1+\frac{r}{m}\right)^m<\frac{r^2}{2m}\,e_{m-2}(r).$$

La différence $e_m(r)-\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$ est donc comprise entre zéro et une quantité qui a pour limite zéro; par suite, le module de $e_m(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ peut devenir plus petit que toute quantité donnée quand m augmente

indéfiniment. On en conclut que

$$\lim\left[e_m(x) - \left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right] = 0,$$

par suite

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e(x);$$

la proposition est donc démontrée pour toute valeur réelle ou imaginaire de la variable x.

3. Nous allons établir maintenant que, si α et α' sont des quantités réelles ou imaginaires, on a

$$\lim\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m = \lim\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m \qquad \text{pour } m = \infty,$$

pourvu que le rapport $\frac{m}{m'}$ ait pour limite zéro, quand m augmente indéfiniment.

En effet, on a identiquement

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m - \left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m \\
&\quad = \frac{\alpha'}{m'}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-1}\right. \\
&\qquad\quad \left. + \left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-2}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right) + \ldots + \left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m-1}\right],
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m - \left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right] \\
&\quad < \operatorname{mod}\frac{\alpha'}{m'}\left[\operatorname{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-1}\right. \\
&\qquad\quad + \operatorname{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^{m-2}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right) + \ldots \\
&\qquad\qquad \left. + \operatorname{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{m-1}\right].
\end{aligned}$$

Nous allons démontrer que le module de la différence

$$\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m - \left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m$$

tend vers zéro quand m augmente indéfiniment.

Soient r le module de α ; r' celui de α', on aura

$$\text{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)<1+\frac{r}{m},$$

$$\text{mod}\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)<1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'};$$

par suite,

$$\text{mod}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]$$
$$<\frac{r'}{m'}\left[\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}+\ldots+\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m-1}\right]$$

et, *a fortiori*,

$$\text{mod}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]$$
$$<\frac{r'}{m'}\times m\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}.$$

Mais, par hypothèse, $\frac{m}{m'}$ a pour limite zéro ; on a donc

$$1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}<1+\frac{r+r'}{m},$$

d'où

$$\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}<\left(1+\frac{r+r'}{m}\right)^{m-1}$$

et, par suite aussi,

$$\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}<\left(1+\frac{r+r'}{m}\right)^{m}$$

et

$$\left(1+\frac{r}{m}+\frac{r'}{m'}\right)^{m-1}<e(r+r').$$

On a donc

$$\text{mod}\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]<\frac{m}{m'}r'\times e(r+r');$$

or $\frac{m}{m'}$, par hypothèse, a pour limite zéro ; $e(r+r')$ est

une quantité finie : par suite, le module de la différence

$$\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m$$

peut devenir plus petit que toute quantité donnée; il s'ensuit que $\left(1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha'}{m'}\right)^m$ et $\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m$ ont même limite.

Il en serait de même si α' était une fonction de m dont le module tendît vers une limite finie quand m croît indéfiniment.

4. Le théorème précédent nous permet de démontrer une propriété importante de la fonction $e(x)$ pour toute valeur réelle ou imaginaire de la variable.

On a, quels que soient x et y,

$$e(x)\times e(y)=e(x+y).$$

En effet, $e(x)$ pour toute valeur réelle ou imaginaire de x est la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ quand m croît indéfiniment :

$$e(x)=\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m,$$

$$e(y)=\lim\left(1+\frac{y}{m}\right)^m;$$

par suite

$$e(x)\times e(y)=\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\left(1+\frac{y}{m}\right)^m$$

ou

$$e(x)\times e(y)=\lim\left(1+\frac{x+y}{m}+\frac{xy}{m^2}\right)^m;$$

mais, d'après ce que l'on a démontré, on a

$$\lim\left(1+\frac{x+y}{m}+\frac{xy}{m^2}\right)^m=\lim\left(1+\frac{x+y}{m}\right)^m$$

ou

$$\lim\left(1+\frac{x+y}{m}+\frac{xy}{m^2}\right)^m=e(x+y),$$

par suite

$$e(x)\times e(y)=e(x+y),$$

ce qui est la propriété fondamentale de la fonction $e(x)$ étendue à des valeurs quelconques de la variable.

SUR L'ÉLIMINATION PAR LA MÉTHODE D'EULER ;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. On sait que, si $F(x,y)$ et $G(x,y)$ sont deux polynômes homogènes en x et y, de degrés respectifs m et p, si $\Delta(x,y)$ est le plus grand commun diviseur de ces deux polynômes, $\Delta(x,y)$ est de la forme

$$\Delta(x,y)=\mathrm{U}\,G(x,y)+\mathrm{V}\,F(x,y),$$

U et V étant des polynômes entiers et homogènes en x et y.

On le voit immédiatement en observant que les restes successifs obtenus dans les opérations qui conduisent au plus grand commun diviseur Δ sont tous de cette forme.

Cela posé, on démontre aisément que, si $F(x,y)$ divise un produit de deux polynômes $G(x,y)\times H(x,y)$ et s'il est premier avec $G(x,y)$, il divise $H(x,y)$; les polynômes F, G et H sont homogènes.

En effet, les deux polynômes $F(x,y)$ et $G(x,y)$ étant premiers entre eux, on pourra trouver deux polynômes U et V, tels que

$$\mathrm{U}\,G(x,y)+\mathrm{V}\,F(x,y)=1\,;$$

par suite,

$$\mathrm{U}\,G(x,y)\times H(x,y)+\mathrm{V}\,F(x,y)\times H(x,y)=H(x,y).$$

$F(x, y)$ divise, par hypothèse, le produit

$$G(x, y) \times H(x, y):$$

il divise donc les deux parties du premier membre et par suite il divise $H(x, y)$.

Cette proposition va nous permettre de démontrer le théorème d'Euler, à savoir :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux polynômes $F(x, y)$, $G(x, y)$ homogènes aient un diviseur commun en x et y, c'est qu'il existe deux polynômes U et V de degrés respectivement moindres que F et G, tels que l'on ait identiquement

$$U\,G(x, y) + V\,F(x, y) = 0.$$

La condition est nécessaire ; car, si $F(x, y)$ et $G(x, y)$ ont un diviseur commun Θ, on aura

$$F(x, y) = \Theta\,F_1(x, y),$$
$$G(x, y) = \Theta\,G_1(x, y)$$

et, par suite,

$$F_1(x, y)\,G(x, y) - G_1(x, y)\,F(x, y) = 0,$$

ce qui fait voir que la condition est nécessaire.

Elle est suffisante ; car, si elle est remplie, on aura

$$U\,G(x, y) = -V\,F(x, y).$$

Si $F(x, y)$ et $G(x, y)$ étaient premiers entre eux, $F(x, y)$ divisant le produit $U\,G(x, y)$ et étant premier avec $G(x, y)$ devrait diviser U qui est de degré inférieur à F ; les polynômes $F(x, y)$ et $G(x, y)$ ne pouvant être premiers entre eux admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur à zéro.

On peut montrer de plus que, si U et V sont respectivement de degrés $m - \lambda$ et $p - \lambda$, les fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$ admettent un plus grand commun diviseur qui est de degré λ au moins.

Supposons, en effet, que le facteur commun à $F(x, y)$ et à $G(x, y)$ soit de degré λ' plus petit que λ.

$$F(x, y) = \theta F_1(x, y),$$
$$G(x, y) = \theta G_1(x, y).$$

$F_1(x, y)$ sera de degré $m - \lambda'$; $G_1(x, y)$, de degré $p - \lambda'$, et l'on aura

$$U G_1(x, y) + V F_1(x, y) = 0;$$

U et V étant de degrés respectivement inférieurs à F_1 et à G_1, les polynômes F_1 et G_1 ne sauraient être premiers entre eux ; il existe donc un facteur commun à $F(x, y)$ et à $G(x, y)$ de degré au moins égal à λ.

2. Nous allons étudier maintenant quelques propriétés des polynômes U et V qui nous seront utiles dans la suite.

I. *Si les polynômes* $F(x, y)$, $G(x, y)$ *n'admettent pour plus grand commun diviseur qu'une fonction du premier degré* $\beta x - \alpha y$, *les polynômes* U *et* V, *qui fournissent l'identité d'Euler, sont premiers entre eux,* U *et* V *étant de degrés* $m - 1$, $p - 1$.

En effet, si U et V admettaient un facteur commun θ, on aurait

$$U = \theta U_1,$$
$$V = \theta V_1,$$

et, par suite, l'identité

$$U G(x, y) + V F(x, y) = 0,$$

devenant

$$U_1 G(x, y) + V_1 F(x, y) = 0,$$

nous montre que $F(x, y)$ et $G(x, y)$ admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur au premier, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur F et G.

II. *Si les deux polynômes* F(x, y), G(x, y) *n'admettent pour plus grand commun diviseur qu'une fonction du premier degré de la forme* $\beta x - \alpha y$, *il n'existe qu'un seul système de polynômes* U *et* V *satisfaisant à l'identité d'Euler*, U *et* V *étant, comme précédemment, de degrés* $m - 1$ *et* $p - 1$.

Supposons, en effet, qu'il existe deux systèmes U et V, U_1 et V_1 donnant les identités

$$U\,G(x, y) + V\,F(x, y) = 0,$$
$$U_1\,G(x, y) + V_1\,F(x, y) = 0;$$

on en tirera

$$(UV_1 - VU_1)\,G(x, y) = 0$$

ou

$$UV_1 - VU_1 = 0.$$

Les polynômes U et V, d'après le théorème précédent, sont premiers entre eux; par suite, U doit diviser U_1 et l'on a

$$U = \lambda U_1;$$

d'où

$$V = \lambda V_1,$$

λ étant une constante : le système (U_1, V_1) est donc identique au système (U, V).

III. *S'il existe plus d'un système de polynômes* U *et* V *de degrés* $m - 1$ *et* $p - 1$ *satisfaisant à l'identité d'Euler, les polynômes* F(x, y), G(x, y) *admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur à un.*

Cela résulte immédiatement du théorème précédent, car U et V ne sauraient dans ce cas être premiers entre eux, à cause de l'égalité

$$UV_1 - VU_1 = 0,$$

qui nous ferait voir que les deux systèmes (U, V), (U_1, V_1) rentrent dans un seul. U et V admettant un

plus grand commun diviseur θ, qui est au moins du premier degré, on a

$$U = \theta U_2,$$
$$V = \theta V_2,$$

et l'identité

$$U_2 G(x, y) + V_2 F(x, y) = 0$$

nous montre que $F(x, y)$ et $G(x, y)$ admettent un plus grand commun diviseur de degré supérieur à un.

IV. *S'il n'existe qu'un seul système de polynômes* U *et* V *de degrés respectifs* $m - 1$ *et* $p - 1$, *qui donnent l'identité d'Euler, les polynômes* $F(x, y)$, $G(x, y)$ *n'admettent qu'un facteur linéaire commun.*

Cette proposition est une conséquence immédiate des précédentes ; car, si les polynômes $F(x, y)$, $G(x, y)$ admettaient un plus grand commun diviseur de degré λ, λ étant plus grand que un, on aurait

$$F(x, y) = \theta F_1(x, y),$$
$$G(x, y) = \theta G_1(x, y),$$

et, par suite,

$$F_1(x, y)\, G(x, y) - G_1(x, y)\, F(x, y) = 0.$$

En multipliant les deux membres par un polynôme arbitraire Φ de degré $\lambda - 1$, on obtiendrait une infinité de fonctions de degrés $m - 1$ et $p - 1$, à savoir

$$\Phi F_1(x, y) \quad \text{et} \quad \Phi G_1(x, y),$$

qui satisferaient à l'identité d'Euler, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3. Cherchons maintenant en fonction des coefficients de $F(x, y)$ et de $G(x, y)$ la condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes $F(x, y)$ et $G(x, y)$ aient un facteur commun.

Il faudra, d'après ce qui précède, qu'en posant

$$U = \alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} y + \ldots + \alpha_{m-1} y^{m-1},$$
$$V = \beta_0 x^{p-1} + \beta_1 x^{p-2} y + \ldots + \beta_{p-1} y^{p-1},$$

on ait identiquement, pour des valeurs convenables des coefficients α et β,

$$U\, G(x, y) + V\, F(x, y) = 0.$$

Si

$$F(x, y) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + \ldots + A_m y^m,$$
$$G(x, y) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} y + \ldots + B_p y^p;$$

en égalant à zéro les coefficients de $x^{m+p-1}, x^{m+p-2}y, \ldots, y^{m+p-1}$, on aura les équations

$$\begin{array}{llr} B_0 \alpha_0 & + A_0 \beta_0 & = 0, \\ B_1 \alpha_0 + B_0 \alpha_1 + \ldots & + A_1 \beta_0 + A_0 \beta_1 & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots, \\ B_p \alpha_{m-1} & + A_m \beta_{p-1} & = 0. \end{array}$$

Ces équations, au nombre de $m + p$, sont linéaires et homogènes par rapport aux $m + p$ inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$.

Elles doivent admettre pour ces quantités des valeurs qui ne sont pas toutes nulles; il faut par suite que le déterminant d'ordre $m + p$ de leurs coefficients soit égal à zéro. Soit Δ ce déterminant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_0 & 0 & \ldots & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & \ldots & . & A_1 & A_0 & \ldots & 0 \\ .. & .. & . & \ldots & . & .. & .. & \ldots & . \\ 0 & .. & . & \ldots & B_p & 0 & .. & \ldots & A_m \end{vmatrix}.$$

$\Delta = 0$ est la condition nécessaire pour que les deux fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$ aient un facteur commun au moins du premier degré.

Je vais démontrer que cette condition est dans tous les cas suffisante.

Supposons que $\Delta = 0$ et que l'un des déterminants d'ordre $m+p-1$, mineur de Δ, ne soit pas nul. On pourra donner à l'une des inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$ une valeur arbitraire et choisir $m+p-1$ des équations, de telle sorte que le déterminant des inconnues qui y figurent ne soit pas nul ; ce sera le mineur que nous avons supposé différent de zéro ; les équations déterminent pour les $m+p-1$ inconnues qui y figurent des valeurs de la forme

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = \lambda_0 \alpha, & \beta_0 = \mu_0 \alpha, \\ \alpha_1 = \lambda_1 \alpha, & \beta_1 = \mu_1 \alpha, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{m-1} = \lambda_{m-1} \alpha, & \beta_{p-1} = \mu_{p-1} \alpha, \end{array}$$

où α désigne la valeur de l'inconnue choisie arbitrairement et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$ des quantités parfaitement déterminées qui ne sont pas toutes nulles, l'une d'elles étant égale à l'unité.

Les fonctions U et V sont donc

$$\begin{aligned} U &= \alpha(\lambda_0 x^{m-1} + \lambda_1 x^{m-1} y + \ldots + \lambda_{m-1} y^{m-1}), \\ V &= \alpha(\mu_0 x^{p-1} + \mu_1 x^{p-1} y + \ldots + \mu_{p-1} y^{p-1}); \end{aligned}$$

abstraction faite du facteur α, elles donnent le système unique de fonctions de degrés $m-1$ et $p-1$ satisfaisant à l'identité

$$U\,G(x, y) + V\,F(x, y) = 0.$$

La solution précédente étant la plus générale pour les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$, il s'ensuit que, si un mineur d'ordre $m+p-1$ de Δ est différent de zéro, il n'existe qu'un seul système de polynômes d'ordre $m-1$ et $p-1$ donnant l'identité d'Euler, et, par suite, d'après les théorèmes précédents, les deux fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ admettent pour plus grand commun diviseur une fonction du premier degré seulement.

Ce qui précède montre évidemment que les fonctions U et V sont effectivement de degrés $m - 1$ et $p - 1$; car λ_0 et μ_0 ne sauraient être nuls, les polynômes U et V s'abaisseraient aux degrés $m - 2$ et $p - 2$ au moins, et, en les multipliant par un polynôme arbitraire du premier degré, on obtiendrait une infinité de fonctions U et V de degrés $m - 1$ et $p - 1$ qui satisferaient à l'identité d'Euler, ce qui n'est pas possible d'après ce qui précède.

On voit donc que, si $\Delta = 0$ et si un mineur d'ordre $m + p - 1$ de Δ est différent de zéro, les deux fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ admettent pour plus grand commun diviseur une fonction qui n'est que du premier degré.

Si tous les déterminants d'ordre $m + p - 1$, mineurs de Δ, sont nuls, et si un déterminant d'ordre $m + p - 2$, mineur de Δ, n'est pas nul, la solution la plus générale du système des équations en $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1 \ldots$ est de la forme

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \lambda_0 \alpha + \lambda'_0 \alpha', & \beta_0 &= \mu_0 \alpha + \mu'_0 \alpha', \\
\alpha_1 &= \lambda_1 \alpha + \lambda'_1 \alpha', & \beta_1 &= \mu_1 \alpha + \mu'_1 \alpha', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\alpha_{m-1} &= \lambda_{m-1} \alpha + \lambda'_{m-1} \alpha'; & \beta_{p-1} &= \mu_{p-1} \alpha + \mu'_{p-1} \alpha',
\end{aligned}$$

où α et α' sont des arbitraires, $\lambda_0, \ldots, \lambda'_0, \ldots, \mu_0, \ldots, \mu'_0, \ldots$ des quantités parfaitement déterminées, qui ne sont pas toutes nulles.

Dans ce cas, les fonctions U et V prennent la forme

$$\begin{aligned}
U &= \alpha U_1 + \alpha' U'_1, \\
V &= \alpha V_1 + \alpha' V'_1,
\end{aligned}$$

U_1, U'_1, V_1, V'_1 étant des polynômes bien déterminés.

Il existe, dans ce cas, une infinité de fonctions U et V

qui donnent l'identité d'Euler; par suite, d'après ce qui précède, $F(x, y)$ et $G(x, y)$ ont un plus grand commun diviseur, qui est au moins du deuxième degré.

On voit que U et V sont en nombre infini; car U_1 et V_1 ne peuvent pas être identiquement nuls à la fois, pas plus que U'_1 et V'_1, puisque, dans l'expression de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots$, un coefficient de α est égal à l'unité, ainsi qu'un coefficient de α'.

On voit donc que, si $\Delta = 0$ et si tous les mineurs d'ordre $m + p - 1$ de Δ sont nuls, les fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$ admettent un facteur commun qui est au moins du second degré.

Il en serait de même si l'ordre du premier des mineurs qui ne s'annule pas s'abaissait au-dessous de l'ordre $m + p - 2$.

SUR LE THÉORÈME DE ROLLE;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. On sait que, si toutes les racines de l'équation dérivée d'une équation algébrique et entière donnée sont *réelles et inégales;* de plus, si, rangées par ordre de grandeur et substituées dans la proposée, elles donnent des résultats de substitution alternativement de signes contraires, toutes les racines de la proposée sont réelles.

Ce théorème est une conséquence immédiate du suivant :

Si les deux plus petites racines réelles de l'équation dérivée, ou les deux plus grandes, substituées dans le premier membre de l'équation proposée, donnent des

résultats de substitution de signes contraires, il y a, dans le premier cas, une racine de la proposée entre — ∞ et la plus petite racine de l'équation dérivée, et, dans le deuxième cas, il y a une racine de la proposée entre la plus grande racine de l'équation dérivée et + ∞.

Rappelons en deux mots la démonstration de ce théorème.

Si $f(x) = 0$ est l'équation proposée, $f'(x) = 0$ l'équation dérivée, α et β les deux plus petites racines de l'équation dérivée, on a, par hypothèse, $f(\alpha) f(\beta) < 0$; il y a donc une racine a de la proposée entre α et β, et l'on a pour une valeur de ε suffisamment petite

$$\frac{f(a-\varepsilon)}{f'(a-\varepsilon)} < 0$$

et

$$\frac{f(-\infty)}{f'(-\infty)} < 0.$$

Or $f'(a-\varepsilon)$ et $f'(-\infty)$ sont de signes contraires; par suite, $f(a-\varepsilon)$ et $f(-\infty)$ sont aussi de signes contraires; il y a donc une racine de $f(x) = 0$ entre a et $-\infty$; elle ne peut être entre a et α ; elle est donc entre $-\infty$ et α.

La démonstration serait la même pour les deux plus grandes racines de l'équation dérivée.

2. Proposons-nous d'étendre le théorème au cas où l'équation dérivée n'aurait pas toutes ses racines inégales.

Nous devons tout d'abord écarter le cas où l'équation dérivée aurait des racines multiples que n'admet pas la proposée; car, s'il en était ainsi, la proposée aurait nécessairement des racines imaginaires.

Supposons donc que l'équation dérivée ait toutes ses racines réelles et que ses racines multiples satisfassent toutes à la proposée.

Soient $a, b, \ldots, g$ les racines de la dérivée qui appartiennent à la proposée; $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ leur degré de multiplicité dans la dérivée; soient $a', b', \ldots, l'$ les racines de l'équation dérivée non communes avec la proposée, supposées toutes simples et rangées par ordre de grandeur croissante. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Si tous les groupes (a', b'), (b', c'), ..., (k', l'), tels que les deux racines d'un même groupe ne comprennent entre elles aucune des racines $a, b, \ldots, g$, donnent, quand on les substitue dans le premier membre de la proposée, des résultats de substitution alternativement de signes contraires, toutes les racines de la proposée sont réelles.

En effet, soit n le nombre des racines $a, b, \ldots, g$; m le nombre des racines $a', b', \ldots, l'$.

I. Supposons d'abord $a, b, \ldots, g$ toutes comprises entre a' et l' : le nombre de groupes de racines que l'on a à substituer d'après l'énoncé est $(m-1)-n$; il y a par hypothèse $m-1-n$ changements de signes et par suite $m-n-1$ racines réelles de $f(x)=0$ qui sont différentes des racines multiples de cette dernière

Il y en a une entre $-\infty$ et a' et une autre entre l et $+\infty$; car, si a' n'est pas compris entre a' et b', le théorème précédent s'applique sans modification, et, si a est compris entre a' et b', on a toujours, quel que soit le degré de multiplicité de a,

$$\frac{f(a-\varepsilon)}{f'(a-\varepsilon)} < 0, \qquad \frac{f(-\infty)}{f'(-\infty)} < 0;$$

par suite, $f(a-\varepsilon)$ et $f(-\infty)$ sont de signes contraires; la nouvelle racine de $f(x)=0$ est comprise entre $-\infty$ et a'; il en est de même pour l'.

L'équation $f(x)=0$ a donc $m-n+1$ racines réelles distinctes; elle a aussi

$$(\alpha+1)+(\beta+1)+\ldots+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\ldots+\gamma+n$$

racines réelles multiples d'ordre de multiplicité $\alpha+1$, $\beta+1, \ldots, \gamma+1$; elle a donc en tout

$$\alpha+\beta+\ldots+\gamma+m+1$$

racines réelles; ce nombre représente précisément le degré de l'équation $f(x)=0$, par suite, toutes les racines de la proposée sont réelles.

II. Supposons que la plus petite racine a du groupe $a, b, \ldots, g$ soit moindre que a' et que g soit plus petit que l'. Les substitutions donnent alors $(m-1)-(n-1)$ changements de signes et, par conséquent, nous révèlent l'existence de $(m-1)-(n-1)$ racines réelles distinctes de $f(x)=0$; il y a en outre une racine de la même équation entre l' et $+\infty$; en y ajoutant les

$$\alpha+\beta+\ldots+\gamma+n$$

racines multiples, on obtient un total de

$$\alpha+\beta+\ldots+\gamma+m+1,$$

qui est encore le degré de l'équation.

III. Supposons maintenant $a<a'$ et $g>l'$; nous n'aurons plus que $m-1-(n-2)$ groupes à substituer, et par hypothèse tous ces groupes nous donnent autant de changements de signes et par suite $m-n+1$ racines simples de $f(x)=0$; ce nombre, joint au nombre des racines multiples, forme encore une somme égale au degré de l'équation proposée. Il est évident d'ailleurs

que les trois hypothèses précédentes sont les seules à examiner; on peut donc dire que, dans tous les cas qui peuvent se présenter et qui sont compatibles avec l'énoncé, l'équation proposée a toutes ses racines réelles.

SUR LA FORME ADJOINTE;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Nous allons, dans ce qui suit, donner une démonstration simple de quelques propriétés de la fonction adjointe d'une forme quadratique donnée; pour plus de simplicité, nous considérerons le cas d'une forme du second degré à trois variables.

Soit

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

Si l'on pose

$$(1)\qquad \begin{cases} Ax + B''y + B'z = u, \\ B''x + A'y + Bz = v, \\ B'x + By + A''z = w, \end{cases}$$

on aura, en vertu du théorème d'Euler,

$$ux + vy + wz = f(x, y, z).$$

Ces quatre équations nous donnent immédiatement

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & f \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$\Delta f = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix},$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

Si l'on développe le second membre de l'égalité précédente, il viendra une expression de la forme

$$\Delta f(x, y, z) \\ = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'uw + 2b''uv.$$

Nous désignerons par $F(u, v, w)$ ce polynôme du second degré; c'est la forme adjointe de $f(x, y, z)$. Ses coefficients sont les dérivées et demi-dérivées de Δ prises par rapport à A, A', A'', B, B', B''.

Si l'on résout les équations (1) par rapport à x, y, z, on obtient le système

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta x = au + b''v + b'w, \\ \Delta y = b''u + a'v + bw, \\ \Delta z = b'u + bv + a''w. \end{cases}$$

Les coefficients a, a', a'', b, b', b'' sont précisément ceux de la fonction adjointe, comme on le vérifie encore en multipliant ces équations par u, v, w et en ajoutant membre à membre.

2. Si l'on opère maintenant sur $F(u, v, w)$, comme nous l'avons fait sur $f(x, y, z)$, c'est-à-dire si l'on forme la fonction adjointe de $F(u, v, w)$, on posera d'abord

$$(3) \qquad \begin{cases} au + b''v + b'w = \xi, \\ b''u + a'v + bw = \eta, \\ b'u + bv + a''w = \zeta; \end{cases}$$

on a aussi

$$\xi u + \eta v + \zeta w = F;$$

il en résulte

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & \xi \\ b'' & a' & b & \eta \\ b' & b & a'' & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & F \end{vmatrix} = 0,$$

et, si l'on désigne par δ le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix},$$

on aura

$$\delta F = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & \xi \\ b'' & a' & b & \eta \\ b' & b & a'' & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ la fonction du second membre; nous aurons

$$\delta\, F(u, v, w) = \Phi(\xi, \eta, \zeta).$$

Mais les équations (3), comparées aux équations (2), nous montrent que

$$\xi = \Delta x,$$
$$\eta = \Delta y,$$
$$\zeta = \Delta z;$$

on aura donc

$$\Delta\, f(x, y, z) = F(u, v, w),$$
$$\delta\, F(u, v, w) = \Phi(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \Delta^2 \Phi(x, y, z).$$

Si l'on élimine $F(u, v, w)$, il viendra

$$\Delta\delta\, f(x, y, z) = \Delta^2 \Phi(x, y, z)$$

et, comme δ est le déterminant adjoint de Δ, on aura

$$\delta = \Delta^2,$$

par suite

$$\Phi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z).$$

La forme adjointe de $F(u, v, w)$ est donc la forme primitive $f(x, y, z)$ dont tous les coefficients ont été multipliés par Δ.

Les coefficients de la fonction Φ sont formés avec les quantités a, a', a'', b, b', b'', comme ceux de F sont formés avec A, A', A'', B, B', B''; par suite, on aura, en vertu de la relation $\Phi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z)$,

$$\begin{aligned} a'a'' - b^2 &= A\Delta, \\ a''a - b'^2 &= A'\Delta, \\ aa' - b''^2 &= A''\Delta, \\ ab - b'b'' &= B\Delta, \\ a'b' - b''b &= B'\Delta, \\ a''b'' - bb' &= B''\Delta. \end{aligned}$$

Ce sont les relations de Gauss; elles nous montrent que, si l'invariant de la fonction $f(x, y, z)$ est nul, la forme adjointe $F(u, v, w)$ est un carré parfait.

SUR UN THÉORÈME DE CHASLES;

PAR M. WEILL.

Chasles a démontré, dans la *Géométrie supérieure,* que si l'on mène à une courbe algébrique toutes les tangentes parallèles à une direction, le centre des moyennes distances des points de contact est indépendant de la direction. On peut démontrer ce résultat de la manière suivante.

m étant le coefficient angulaire de la direction, une tangente parallèle à cette direction aura une équation de la forme

$$y = mx + \varphi(m).$$

Supposons qu'il y en ait p; par suite, on pourra mener à la courbe p tangentes par un point (x_1, y_1); si donc on pose $y_1 - mx_1 = h$, on aura, pour déterminer h, m étant donné, une équation de la forme

$$h^p + A h^{p-1} + B h^{p-2} + \ldots = 0.$$

Je dis que A est une fonction linéaire de m, et cela suffit à la démonstration. En effet, si la tangente doit passer par (x_1, y_1), son équation donnera

$$\varphi(m) = y_1 - mx_1 = h,$$

et, en remplaçant h par cette valeur, on aura une équation en m qui devra être du degré p.

Dès lors, on a

$$A = km + L.$$

Ceci posé, le point où la droite $y = mx + \varphi(m)$ touche son enveloppe a pour abscisse

$$\alpha = -\varphi'(m);$$

par suite,

$$\Sigma\alpha = -\Sigma\varphi'(m) = k.$$

Le théorème est donc démontré, car on verrait de même que la somme des ordonnées des points de contact est constante.

SUR LA DIVISION DES POLYNOMES;

PAR M. WEILL.

Soit à diviser 1 par le polynôme

$$1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots + \lambda x^n,$$

dans lequel les coefficients α, β, ..., λ sont des entiers. Les coefficients du quotient seront tous des nombres

entiers. Or, si l'on désigne par $f(x)$ le polynôme, et par $a, b, c, \ldots, l$ ses racines, on a l'identité

$$\frac{1}{f(x)} = \sum \frac{\frac{1}{f'(a)}}{x-a} = \sum \frac{-1}{f'(a)}\left(\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots\right).$$

Par suite, le coefficient de x^n dans le quotient considéré est

$$-\frac{1}{a^{n+1}f'(a)} - \frac{1}{b^{n+1}f'(b)} - \ldots,$$

et c'est un nombre entier. Cette remarque, extrêmement simple, donne des théorèmes d'Arithmétique assez curieux. Pour les énoncer, nous nous bornerons à considérer comme diviseur un trinôme du second degré; il est facile d'étendre les résultats à des cas plus complexes. Considérons d'abord le quotient

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - \ldots.$$

Soit λ l'exposant de x dans un terme; on voit que, si $\lambda = 3m+2$, le coefficient est zéro; il est 1 et (-1) quand λ est de la forme $3m$ et $3m+1$.

Or le coefficient de x^λ est

$$(-1)^{\lambda+2}\frac{(1+i\sqrt{3})^{\lambda+1} - (1-i\sqrt{3})^{\lambda+1}}{2^{\lambda+1}i\sqrt{3}}.$$

On en conclut, en représentant par C_m^p le nombre des combinaisons de m objets p à p,

$$C_{\lambda+1}^1 - 3C_{\lambda+1}^3 + 3^2C_{\lambda+1}^5 - \ldots = \pm 2^\lambda.$$

Il serait intéressant d'établir cette formule par des considérations directes.

Considérons encore le quotient

$$\frac{1}{1-x-x^2};$$

les coefficients des termes de ce quotient forment la suite bien connue 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... L'expression du coefficient de x^{n-1}, c'est-à-dire du $n^{\text{ième}}$ nombre de la série de Lamé, est

$$\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}},$$

et, par suite, le nombre entier

$$C_n^1+5C_n^3+5^2C_n^5+\ldots$$

est un multiple de 2^{n-1}.

D'une manière générale, a et b étant deux entiers quelconques (b ne pouvant être nul), le nombre

$$C_n^1+(a^2-4b)C_n^3+(a^2-4b)^2C_n^5+\ldots$$

est multiple de 2^{n-1}.

SUR QUELQUES FORMES QUADRATIQUES;

Par M. WEILL.

I. L'expression

$$(b-c)(\lambda+a)^2+(c-a)(\lambda+b)^2+(a-b)(\lambda+c)^2$$

étant indépendante de λ, il en résulte que tout nombre appartenant à la forme

$$(b-c)a^2+(c-a)b^2+(a-b)c^2$$

peut, d'une infinité de manières, être mis sous la forme

$$(b-c)X^2+(c-a)Y^2+(a-b)Z^2.$$

Par une transformation facile, on en conclut que

tout nombre de la forme

$$pq(p+q)$$

peut, d'une infinité de manières, se mettre sous la forme

$$px^2+qy^2-(p+q)z^2.$$

Ainsi, tout nombre de la forme $m(m+1)$ est, d'une infinité de manières, de la forme

$$mx^2+y^2-(m+1)z^2.$$

De même, tout nombre de la forme $2m^2$ est, d'une infinité de manières, de la forme

$$x^2+y^2-2z^2.$$

Il est facile de généraliser cette méthode et d'en déduire un grand nombre de résultats.

II. Soit un nombre de la forme

$$Ax^2+By^2+Cz^2.$$

Il appartiendra aussi à la forme

$$\begin{aligned}X^2+Y^2+Z^2 &= (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\\ &+(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)^2+(\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z)^2,\end{aligned}$$

si l'on a les égalités

$$\begin{aligned}A &= \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2,\\ B &= \beta^2+\beta'^2+\beta''^2,\\ C &= \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2,\\ 0 &= \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'',\\ 0 &= \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma'',\\ 0 &= \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'';\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}A &= \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2,\\ B &= \beta^2+\beta'^2+\beta''^2,\\ 0 &= \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'',\\ C &= AB.\end{aligned}$$

Pour simplifier, nous ferons $\beta''=1$; d'où

$$B=\beta^2+\beta'^2+1,$$
$$A=\alpha^2+\alpha'^2+(\alpha\beta+\alpha'\beta')^2,$$
$$C=AB.$$

On a ainsi une solution très générale, mais non la solution complète du problème suivant :

Trouver les formes des entiers A, B, C *qui soient telles que le nombre*

$$Ax^2+By^2+Cz^2$$

soit une somme de trois carrés.

Ainsi le nombre

$$2x^2+3y^2+6z^2$$

est une somme de trois carrés; de même,

$$5x^2+6y^2+30z^2$$

est une somme de trois carrés, et ainsi de suite.

SUR LES HÉLICOÏDES;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI.

---

1. Considérons la surface engendrée par une droite L assujettie à un mouvement hélicoïdal autour d'une droite R; soient P le point de rencontre de L avec la perpendiculaire commune aux droites L, R, et h la plus courte distance de ces droites. L'hélice E décrite par le point P est la ligne de striction de la surface réglée engendrée; soient i l'inclinaison de L sur R et θ l'incli-

naison constante de l'hélice E sur les génératrices du cylindre C.

On passe d'une position de la droite mobile à la suivante par une rotation infinitésimale autour de R et une translation suivant la direction R; la rotation est mesurée par l'angle de contingence $\frac{d\sigma}{h}$ de la section droite du cylindre C, et la translation par $ds\cos\theta$, ds et $d\sigma$ étant les arcs élémentaires de l'hélice E et de la section droite de C.

Or

$$d\sigma = ds\sin\theta;$$

par conséquent, si nous désignons par p le paramètre du mouvement hélicoïdal, c'est-à-dire le rapport de la vitesse de translation à la vitesse de rotation, nous aurons

$$p = \frac{ds\cos\theta}{\frac{d\sigma}{h}} = h\cot\theta.$$

Si l hélicoïde est développable, la droite mobile est à chaque instant tangente à l'hélice E : donc $\theta = i$ et $p = h\cot i$.

Si l'hélicoïde a pour génératrices rectilignes les binormales d'une ligne, l'hélice E est une trajectoire orthogonale des génératrices; donc

$$\theta + i = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad p = h\operatorname{tang} i.$$

On a donc le théorème :

Si h est la plus courte distance des deux droites L, R, *et i leur inclinaison, la droite* L, *dans un mouvement hélicoïdal dont le paramètre est p, autour de* R, *engendre un hélicoïde développable lorsque $p = h\cot i$,*

et un hélicoïde lieu des binormales d'une hélice circulaire, lorsque $p = h \tang i$.

2. Soient $\xi = \rho \cos u$, $\eta = \rho \sin u$, ζ (ρ et ζ étant deux fonctions arbitraires de u) les coordonnées d'un point quelconque d'une ligne à double courbure L, assujettie à un mouvement hélicoïdal autour de l'axe des ζ; si p est le paramètre du mouvement, les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'hélicoïde engendré sont données comme il suit :

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos v - \eta \sin v = \rho \cos(u+v); \\ y &= \xi \sin v + \eta \cos v = \rho \sin(u+v); \\ z &= \zeta + pv. \end{aligned}$$

Sur l'hélicoïde, $u =$ const. est l'équation des hélices circulaires et $v =$ const. est l'équation de la ligne génératrice dans ses différentes positions.

De ces égalités, en indiquant les dérivées par des accents, on tire

$$\begin{aligned} E &= \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \rho^2 + \rho'^2 + \zeta'^2; \\ F &= \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} = \rho^2 + p\zeta'; \\ G &= \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \rho^2 + p^2. \end{aligned}$$

Si A, B, C sont les déterminants qui ont pour éléments de la deuxième et de la troisième ligne $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$; $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, et pour éléments de la première respectivement $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$; $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$; $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, nous avons

$$\begin{aligned} A &= \zeta''\rho\rho' + \zeta'(\rho^2 - \rho\rho'') - p(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''), \\ B &= \zeta'\rho^2 - p(\rho^2 + \rho'^2), \\ C &= \rho^2(\zeta' - p). \end{aligned}$$

L'équation différentielle des asymptotiques est

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}[\zeta''\rho\rho' + \zeta'(\rho^2 - \rho\rho'') - p(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')]du^2 \\ + 2[\zeta'\rho^2 - p(\rho^2 + \rho'^2)]du\,dv + \rho^2(\zeta' - p)dv^2 = 0.\end{aligned}$$

Si la génératrice L est dans toutes ses positions une asymptotique de l'hélicoïde, la dernière équation doit être vérifiée lorsque l'on y suppose $dv = 0$; on aura par conséquent

$$(1) \qquad \zeta''\rho\rho' + \zeta'(\rho^2 - \rho\rho'') - p(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'') = 0,$$

d'où l'on déduit par intégration

$$\zeta = a + \int\left(b + p\int\frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho\rho'}\,e^{\int\frac{\rho - \rho''}{\rho'}du}\,du\right)e^{-\int\frac{\rho - \rho''}{\rho'}du}\,du.$$

On a ainsi ce théorème :

Les lignes L *qui, dans un mouvement hélicoïdal autour de l'axe* Oz, *restent toujours asymptotiques sur la surface engendrée, sont représentées par les équations*

$$\xi = \rho\cos u,$$
$$\eta = \rho\sin u,$$
$$\zeta = a + \int\left(b + p\int\frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho\rho'}\,e^{\int\frac{\rho - \rho''}{\rho'}du}\,du\right)e^{-\int\frac{\rho - \rho''}{\rho'}du}\,du.$$

a et b étant deux constantes arbitraires et p le paramètre du mouvement hélicoïdal.

3. Cherchons si une hélice peut vérifier la condition précédente, lorsque le mouvement hélicoïdal a lieu autour d'une droite parallèle aux génératrices du cylindre.

Si i est l'inclinaison constante de l'hélice sur les géné-

ratrices du cylindre, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe sont

(2) $\xi = \rho \cos u, \qquad \eta = \rho \sin u, \qquad \zeta = \cot i \int \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, du,$

et la condition (1) devient

$$(2\rho' - \rho\rho'' + \rho^2)\left(\frac{\rho^2 \cot i}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} - p\right) = 0.$$

Nous avons ici deux cas à considérer, selon que soit vérifiée l'équation

$$2\rho' - \rho\rho'' + \rho^2 = 0$$

ou bien

$$\frac{\rho^2 \cot i}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} - p = 0.$$

Dans le premier cas, si l'on pose $\rho = e^{\varphi}$, on obtient l'équation

$$\varphi'' = 1 + \varphi'^2,$$

qui donne par intégration

$$\varphi = \log \frac{a}{\cos u} \qquad (a = \text{const.}).$$

Par conséquent

(3) $$\rho = \frac{a}{\cos u};$$

c'est l'équation polaire d'une droite.

Dans l'autre cas, on a

$$p \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 \cot^2 i - p^2}} = u + a,$$

en faisant $a = -\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\arcsin\left(\frac{p}{\rho \cot i}\right) = \frac{\pi}{2} - u,$$

d'où l'on déduit

(4) $$\rho \cos u = p \tang i.$$

Le cylindre qui contient l'hélice se réduit donc à un plan et l'hélice à une droite.

Donc :

Si une hélice est assujettie à un mouvement hélicoïdal autour d'une droite parallèle aux génératrices du cylindre, la condition que la ligne reste toujours asymptotique sur la surface engendrée est vérifiée seulement lorsque l'hélice se réduit à une droite.

On peut observer que, dans le premier cas (3), le paramètre du mouvement est arbitraire; dans le second cas (4), le paramètre est donné par l'égalité $p = h \cot i$, h étant la plus courte distance entre la droite mobile et l'axe des z; l'hélicoïde engendré est donc, en vertu du théorème du n° 1, une surface développable.

4. Nous allons voir si, dans un hélicoïde, les hélices circulaires peuvent être asymptotiques; une telle condition est remplie lorsque l'équation (1) est vérifiée en y supposant $du = 0$. Par conséquent on doit avoir, pour la ligne génératrice L,

$$(5) \qquad \zeta = pu.$$

Par chaque point de la ligne L, conduisons la droite perpendiculaire à l'axe Oz; on obtient ainsi une surface réglée à plan directeur dans laquelle l'axe Oz est la ligne de striction; le paramètre de distribution des plans tangents de cette surface réglée est $\frac{d\zeta}{du}$ qui est, à cause de (5), constant. La surface réglée est donc l'hélicoïde gauche, lieu des normales principales d'une hélice régulière; par conséquent, la ligne L, dans le mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de Oz, glisse sur cet hélicoïde gauche.

On a donc ce théorème :

Si les hélices circulaires d'un hélicoïde sont asymptotiques, la surface est l'hélicoïde gauche engendré par les normales principales d'une hélice circulaire.

La relation (5) caractérise les lignes placées sur l'hélicoïde gauche à plan directeur et on peut l'appliquer avec profit.

Exemples. — Une ligne sphérique peut être représentée par les équations

$$\xi = \rho \cos u, \qquad \eta = \rho \sin u, \qquad \zeta = \sqrt{R^2 - \rho^2},$$

R étant le rayon de la sphère; l'égalité (5) devient

$$pu = \sqrt{R^2 - \rho^2},$$

d'où l'on tire

$$\rho = \sqrt{R^2 - p^2 u^2}.$$

Donc :

La ligne sphérique

$$\xi = \sqrt{R^2 - p^2 u^2} \cos u, \qquad \eta = \sqrt{R^2 - p^2 u^2} \sin u, \qquad \zeta = pu,$$

dans le mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de l'axe Oz, *engendre une portion d'un hélicoïde gauche à plan directeur.*

Cherchons si, dans l'hélicoïde gauche à plan directeur, il y a des hélices, non trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes, placées sur des cylindres ayant les génératrices parallèles à l'axe de l'hélicoïde.

On a, à présent, pour la coordonnée ζ,

$$\zeta = \cot i \int \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, du,$$

et, pour que la condition (5) soit vérifiée, il doit être

$$p \tang i = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2},$$

d'où l'on déduit

$$du = \frac{d\rho}{\sqrt{p^2 \operatorname{tang}^2 i - \rho^2}}.$$

On obtient par intégration

$$u = \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\rho}{p \operatorname{tang} i} \right),$$

d'où

$$\rho = p \operatorname{tang} i \sin u;$$

c'est l'équation polaire d'une circonférence de rayon $\frac{p \operatorname{tang} i}{2}$ qui passe par le pôle.

Pour chaque valeur de i, on obtient une hélice circulaire placée sur la surface.

Donc :

Sur l'hélicoïde gauche, lieu des normales principales d'une hélice circulaire, il y a un nombre infini d'hélices, non trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes, qui sont placées sur des cylindres dont les génératrices sont parallèles à l'axe de l'hélicoïde. Ces hélices sont circulaires et les cylindres passent par l'axe de l'hélicoïde.

Puisque l'on a

$$p = 2r \cot i,$$

r étant le rayon du cercle qui passe par le pôle, il subsiste ce théorème :

Si une hélice circulaire, placée sur un cylindre dont la section droite a un rayon r et inclinée de l'angle i sur les génératrices, est assujettie à un mouvement hélicoïdal de paramètre $p = 2r \cot i$ autour d'une génératrice quelconque du cylindre, la surface engendrée est une portion d'un hélicoïde gauche à plan directeur.

5. Si θ est l'angle des lignes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sur un hélicoïde, nous avons

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

d'où il résulte

$$F^2 = EG\cos^2\theta.$$

Si l'on substitue dans cette égalité les valeurs de E, F, G du n° 2, on a

$$(\rho^2 + p\zeta')^2 = (\rho^2 + \rho'^2 + \zeta'^2)(\rho^2 + p^2)\cos^2\theta,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&[p^2 - (p^2 + \rho^2)\cos^2\theta]\zeta'^2\\ &\quad + 2p\rho^2\zeta' + \rho^4 - (\rho^2 + \rho'^2)(p^2 + \rho^2)\cos^2\theta = 0;\end{aligned}$$

d'où

$$\zeta' = \frac{-p\rho^2 \pm \cos\theta\sqrt{p^2 + \rho^2}\sqrt{\rho^4 + (\rho^2 + \rho'^2)(p^2\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\theta)}}{p^2\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\theta}.$$

Donc :

Les lignes qui, dans un mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de l'axe O*z, restent toujours trajectoires sous l'angle constant* θ *des hélices de l'hélicoïde engendré, sont représentées par les équations*

$$(6)\quad\begin{cases}\xi = \rho\cos u,\\ \eta = \rho\sin u,\\ \zeta = \displaystyle\int \frac{-p\rho^2 \pm \cos\theta\sqrt{p^2 + \rho^2}\sqrt{\rho^4 + (\rho^2 + \rho'^2)(p^2\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\theta)}}{p^2\sin\theta - \rho^2\cos^2\theta}\,du.\end{cases}$$

Si, dans les équations (6), on fait $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a un résultat très remarquable; dans ce cas, la ligne génératrice de l'hélicoïde est dans toutes ses positions une géodésique de la surface. On a ainsi ce théorème :

Les lignes qui, dans un mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de l'axe O*z restent toujours géo-*

désiques et trajectoires orthogonales des hélices circulaires de l'hélicoïde engendré, sont représentées par les équations

$$(7) \qquad \xi = \rho \cos u, \qquad \eta = \rho \sin u, \qquad \zeta = -\frac{1}{p}\int \rho^2 du.$$

Si, dans les équations (6), on suppose $p = 0$, on obtient les lignes qui, dans la rotation autour de l'axe Oz, engendrent une surface de révolution, dont elles sont des loxodromies; cette hypothèse réduit les équations (6) comme il suit :

$$(8) \qquad \begin{cases} \xi = \rho \cos u, \\ \eta = \rho \sin u, \\ \zeta = \dfrac{1}{\cos\theta}\displaystyle\int \sqrt{\rho^2 \sin^2\theta - \rho'^2 \cos^2\theta}\, du. \end{cases}$$

Si la ligne L est une hélice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz, on a

$$\zeta = \cot i \int \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, du;$$

en comparant cette égalité avec la dernière des équations (8), on obtient

$$\rho\sqrt{\tang^2\theta - \cot^2 i} = \frac{1}{\sin i}\rho';$$

d'où

$$\frac{d\rho}{\rho} = \sin i \sqrt{\tang^2\theta - \cot^2 i}\, du,$$

et, par intégration,

$$\log\rho = \log a + \left(\sin i \sqrt{\tang^2\theta - \cot^2 i}\right) u,$$

a étant une constante arbitraire.

Cette égalité peut s'écrire

$$\rho = a e^{\left(\sin i \sqrt{\tang^2\theta - \cot^2 i}\right) u} :$$

c'est l'équation d'une spirale logarithmique; une telle courbe se réduit à un cercle de rayon a lorsque $\tang \theta = \cot i$.

L'hélice demandée est, par conséquent, une hélice cylindro-conique ou bien une hélice circulaire.

Donc :

Les seules surfaces de révolution dans lesquelles une loxodromie est une hélice placée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe de la surface sont le cône et le cylindre de révolution.

Si la ligne représentée par les équations (7) est une hélice, il doit être

$$-\frac{1}{p}\rho^2 = \cot i\sqrt{\rho^2 + \rho'^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{p \cot i \, d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - p^2\cot^2 i}} = du.$$

En intégrant,

$$-\arcsin\left(\frac{p\cot i}{\rho}\right) = u + a,$$

et, si l'on pose la constante arbitraire $a = -\frac{\pi}{2}$, on a

$$\rho\cos u = p\cot i;$$

c'est l'équation polaire d'une droite dont la distance h au pôle est donnée par l'égalité

$$h = p\cot i.$$

Le cylindre est donc réduit à un plan et l'hélice à une droite; la plus courte distance entre cette droite et l'axe Oz est $p\cot i$.

En ayant égard au théorème du n° 1, on peut donc énoncer ce théorème :

Si une trajectoire orthogonale des hélices circulaires

d'un hélicoïde a ses tangentes inclinées d'un angle constant sur l'axe de l'hélicoïde, cette trajectoire est une droite, et l'hélicoïde est engendré par les binormales d'une hélice circulaire.

Si la projection de la ligne mobile L sur le plan $\zeta = 0$ est une spirale logarithmique, on a

$$\rho = a e^{\cot i u},$$

i étant l'inclinaison constante de la ligne sur les rayons vecteurs. Alors

$$\zeta = -\frac{a^2}{p}\int e^{2\cot i u}du = -\frac{a^2}{2p}\tang i\, e^{2\cot i u} = -\frac{\tang i}{2p}\rho^2;$$

mais, si s est l'arc de la spirale, compté du point $u = 0$, on a

$$\rho = s\cos i + a,$$

par conséquent

$$\zeta = -\frac{\tang i}{2p}(s\cos i + a)^2,$$

ou bien

$$\left(s + \frac{a}{\cos i}\right)^2 = -\frac{2p}{\sin i \cos i}\zeta.$$

Cette équation démontre que, lorsque le cylindre projetant L sur le plan $\zeta = 0$ est développé sur un plan, la ligne L devient une parabole dont le paramètre est $\frac{2p}{\sin i \cos i}$.

Donc :

Parmi les lignes placées sur un cylindre dont la section droite est une spirale logarithmique, celles qui, dans un mouvement hélicoïdal autour de la génératrice qui passe par le pôle de la spirale, restent toujours géodésiques et trajectoires orthogonales des hélices de l'hélicoïde engendré, sont des paraboles dont le plan est enveloppé sur le cylindre de manière que

l'axe de la parabole coïncide avec une génératrice du cylindre.

6. Sur l'hélicoïde engendré par une ligne L désignons par ρ_t le rayon de courbure géodésique des trajectoires orthogonales L_t des lignes L; il résulte

$$(9) \qquad \frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d}{du}\left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\right).$$

La ligne L sera donc une trajectoire orthogonale d'un système de géodésiques lorsque

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} = a,$$

a étant une constante.

Cette égalité, en ayant égard aux valeurs de E, F, G du n° 2, devient

$$(\rho^2 + \rho'^2 + \zeta'^2)(p^2 + \rho^2) - (\rho^2 + p\zeta')^2 = a^2(\rho^2 + \rho'^2 + \zeta'^2),$$

d'où l'on tire

$$\zeta' = \frac{p\rho^2 \pm \sqrt{p^2\rho^4 + (\rho^2 - a^2)[(a^2 - p^2)(\rho^2 + \rho'^2) - \rho^2\rho'^2]}}{\rho^2 - a^2}$$

Donc :

Les lignes qui, dans un mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de l'axe Oz, restent sur l'hélicoïde engendré trajectoires orthogonales d'un système de géodésiques, sont représentées par les équations

$$\xi = \rho \cos u,$$
$$\eta = \rho \sin u,$$
$$\zeta = \int \frac{p\rho^2 \pm \sqrt{p^2\rho^4 + (\rho^2 - a^2)[(a^2 - p^2)(\rho^2 + \rho'^2) - \rho^2\rho'^2]}}{\rho^2 - a^2} du.$$

On a un résultat très remarquable, lorsque l'on sup-

pose constante la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_v}$ de la ligne mobile L et en outre $p = 0$; ici il doit être

$$\frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{d\sqrt{E}}{dv} - \frac{d}{du}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)\right] = \text{const.} = -\frac{1}{k}.$$

Mais, à cause des valeurs de E, F, G, nous avons

$$\frac{1}{\rho_v} = -\frac{\rho'}{a\rho};$$

il vient donc

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{a}{k};$$

d'où

$$\rho = be^{\frac{a}{k}u},$$

b étant une constante. La projection équatoriale de la ligne mobile L est donc une spirale logarithmique.

Si l'on désigne par K la courbure totale de la surface, on a (puisque E, F, G sont indépendantes de v)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{dG}{du}\right),$$

c'est-à-dire

$$K = -\frac{1}{a^2}\frac{\rho^3\rho'' + a^2(\rho'^2 - \rho\rho'')}{\rho^4}.$$

Cette égalité, à cause de $\rho = be^{\frac{a}{k}u}$, devient

$$K = -\frac{1}{k^2}.$$

On a donc ce théorème :

Si sur une surface de révolution une trajectoire orthogonale L *d'un système de géodésiques a la courbure géodésique constante, la projection équatoriale de la ligne* L *est une spirale logarithmique et la surface est à courbure constante négative.*

7. Considérons l'hélicoïde engendré par un cercle de rayon R dont le centre glisse sur l'axe de la surface, tandis que le plan du cercle passe toujours par cet axe.

Puisque les coordonnées d'un point quelconque du cercle sont

$$\xi = \mathrm{R}\cos u, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \mathrm{R}\sin u,$$

les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la surface sont données par les égalités

$$x = \mathrm{R}\cos u \cos v, \qquad y = \mathrm{R}\cos u \sin v, \qquad z = pv + \mathrm{R}\sin u,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{E} = \mathrm{R}^2, \qquad \mathrm{F} = 2p\mathrm{R}\cos u, \qquad \mathrm{G} = p^2 + \mathrm{R}^2\cos^2 u.$$

La formule (9) donne pour la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_t}$ des trajectoires orthogonales L_t des cercles ($v = \text{const.}$)

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\mathrm{R}\sqrt{p^2 + (\mathrm{R}^2 - p^2)\cos^2 u}} \frac{d}{du}\left[\sqrt{p^2 + (\mathrm{R}^2 - p^2)\cos^2 u}\right].$$

Les lignes L_t sont des géodésiques sur l'hélicoïde lorsque $\frac{1}{\rho_t} = 0$, condition qui n'est autrement remplie que par $\mathrm{R} = p$.

On a donc la propriété suivante :

Lorsque le paramètre du mouvement hélicoïdal est égal au rayon du cercle mobile, les trajectoires orthogonales des cercles sont des lignes géodésiques.

BIBLIOGRAPHIE.

TRAITÉ DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET DE LEURS APPLICATIONS; par M. *G. Halphen*, membre de l'Institut.

Ire Partie. Grand in-8° de VIII-492 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1886. Prix : 15^fr^.

Dans le domaine des Mathématiques pures, on peut distinguer deux parties : l'une, la plus élevée, qui s'augmente constamment, presque toujours par degrés insensibles, ne regarde que les mathématiciens; l'autre, longtemps immuable, s'accroît brusquement, à des intervalles éloignés, par l'adoption de quelque théorie nouvelle : c'est la matière de l'enseignement, ce que doivent retenir et savoir appliquer tous les hommes qui s'adonnent aux sciences exactes et, sans cultiver les Mathématiques, ont toujours besoin de les connaître.

Dans laquelle de ces deux parties faut-il aujourd'hui ranger les fonctions elliptiques? Partout on les enseigne; seuls les mathématiciens savent s'en servir. Elles traversent, semble-t-il, une période de transition. C'est avec l'espoir de hâter la fin de cette période que j'ai entrepris cet Ouvrage.

Trois Volumes, dont voici le premier, contiendront à peu près complète, je l'espère, la théorie des fonctions elliptiques, avec ses principales applications, au point où l'on est aujourd'hui parvenu. Mais, en offrant au lecteur le moyen de s'instruire complètement dans cette partie des Mathématiques, j'ai voulu lui permettre de graduer son instruction. J'ai donc réservé pour le troisième Volume ce qu'il y a de plus abstrait, la théorie de la *transformation*, les applications à l'Algèbre et à l'Arithmétique supérieure; cette partie ne regarde que les mathématiciens, et les travaux incessants dont elle est actuellement l'objet prouvent qu'elle n'est pas encore parvenue à la dernière perfection.

L'étude des sept premiers Chapitres, la moitié du premier Volume, suffira pour connaître les fonctions elliptiques aussi complètement qu'on apprend la Trigonométrie dans les cours élémentaires, pour comprendre les applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géométrie, au Calcul intégral.

Ces applications sont nombreuses déjà, toutes d'une grande importance, comme l'attestent les noms des géomètres qui les ont faites, Gauss, Jacobi, Lamé, Hermite, pour ne citer que les plus célèbres.

C'est à rendre ces applications facilement accessibles que je me suis surtout attaché, et l'on ne devra pas s'étonner de me voir, en maint endroit, insister sur des détails qui ne semblent

point d'abord intéresser la théorie générale : la meilleure théorie n'est-elle pas celle qui s'applique le mieux?

Les applications auraient pu, au moins en grande partie, être placées dans la seconde moitié de ce premier Volume. Je les ai remises au second, qu'elles rempliront entièrement. Il a paru préférable de compléter celui-ci par l'exposé des divers modes de développement des fonctions elliptiques en séries. C'est une théorie dont la connaissance constitue un second degré d'instruction, mais qui, répétons-le, n'est pas indispensable, pas plus que la connaissance des développements en séries n'est jugée nécessaire pour apprendre et appliquer la Trigonométrie. Toutefois, comme l'un des modes de développement, particulièrement célèbre, a une grande importance pour les calculs numériques, je l'ai exposé à part, dès le Chapitre VIII, offrant ainsi au lecteur l'occasion d'acquérir facilement, par la connaissance des séries de Jacobi, ce qu'il y a de plus essentiel dans la seconde partie de ce Volume.

Les mathématiciens verront sans doute avec étonnement que, ne prenant pas les séries pour point de départ, je n'emploie pas cependant les intégrales imaginaires et les éléments de la théorie générale des fonctions, si propres à simplifier l'exposition directe. Les procédés dont je fais usage, plus élémentaires, répondent mieux, je crois, à l'idée d'instruction graduelle, qui m'a servi de guide. En rejetant à la fin du Volume l'étude des liens étroits qui unissent les intégrales imaginaires et les fonctions doublement périodiques, j'ai sacrifié l'élégance à l'utilité. Si j'ai été entraîné par là, notamment dans les Chapitres V et VI, à quelques longueurs, il ne faut pas trop le regretter : les détails qu'exige l'unique considération des intégrales réelles sont, de toute façon, nécessaires; si, en se servant d'abord des intégrales imaginaires, on les évite dans la théorie générale, on est tenu de les aborder ensuite pour certaines applications. Sur ce point donc, je demande aux mathématiciens leur indulgence provisoire, jusqu'à la publication du second Volume. Ils pourront alors juger si le mode d'exposition, adopté spécialement pour rendre les applications faciles, répond, autant que je le crois, au but proposé.

Les notations employées dans cet Ouvrage sont celles de M. Weierstrass. La préférence qu'il faut leur accorder sur les notations primitives n'est pas contestable. Pour les applications, elles constituent un très grand progrès, grâce surtout à

l'avantage de fournir, dans l'inversion des intégrales elliptiques, les mêmes formules, quel que soit le nombre des racines réelles du polynôme placé sous le radical. Ce n'est pas seulement par là que M. Weierstrass a innové dans la théorie des fonctions elliptiques, comme on peut le voir dans les quelques feuilles, trop concises, publiées, d'après ses Leçons, par M. H.-A. Schwarz avec un soin extrêmement remarquable. Je n'ai pas manqué de consulter cette publication et d'y prendre un grand nombre de formules.

Tout en adoptant les notations nouvelles, je fais connaître, dès le début, les anciennes. En apprenant ici les fonctions elliptiques, on n'aura pas à craindre de ne pouvoir lire les Ouvrages ou les Mémoires écrits avec les notations primitives, qui, à défaut d'autres titres, ont celui d'avoir servi à Legendre, Abel, Jacobi et à notre contemporain M. Hermite.

Dans le cours de ce Volume, on trouvera rarement cités les auteurs à qui sont empruntées les idées ou les démonstrations. Je n'aurais rien ajouté à la gloire des géomètres que je viens de nommer en répétant leurs noms à chaque page. J'ai cru mieux faire en composant un aperçu historique sur les fonctions elliptiques, où chaque progrès, mis à sa place au point de vue de l'importance et de l'époque, apparaît dans son vrai jour. Mais cet aperçu ne peut être utile qu'aux personnes déjà versées dans la théorie; il terminera le troisième Volume et contiendra les indications nécessaires pour que le lecteur retrouve aisément dans le cours de l'Ouvrage les théories, dont il connaîtra déjà le sens, et dont l'histoire lui sera alors présentée.

Des amis dévoués, MM. Alfred Collet et Charles Brisse ont pris la peine de lire les épreuves et m'ont prêté un bien utile et bien gracieux concours; notre célèbre imprimeur-éditeur, M. Gauthier-Villars, après avoir accueilli cette publication avec un empressement que je ne saurais oublier, lui a prodigué tous ses soins, au delà, sans doute, de ce qu'elle méritait. Seul, on le voit, je suis responsable des fautes qui subsistent. Mais le public d'élite, auquel s'adresse cet Ouvrage, saura bien discerner que j'ai voulu seulement être utile et me pardonnera, sans effort, toutes les imperfections qu'il serait en droit de me reprocher, si mon livre avait des prétentions plus hautes.

---

est possible. Le lecteur en trouvera dans ce Recueil des exemples plus frappants et plus utiles que les meilleurs préceptes. Il est très bon, d'ailleurs, de traiter la même question par plusieurs procédés, afin de donner de la souplesse à l'esprit et de se familiariser avec l'Algèbre.

Que les jeunes gens ne craignent pas de s'attarder dans l'étude approfondie de cet Ouvrage; elle leur fera faire de nouveaux progrès dans les Mathématiques, sans lesquelles la vulgarisation de la Physique est une chimère. « Les Mathématiques, a dit M. Duruy, sont une clef d'or qui ouvre toutes les sciences. »

TABLE DES MATIÈRES.

1197 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

TABLE DES MATIÈRES.

Février 1887.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME SÉRIE.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

MARS 1887.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, rue Hallé, 32 et 34,
ou à M. BRISSE, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine).
(AFFRANCHIR.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

Ce Recueil paraît chaque mois.

Par application de la loi du 7 avril 1879, tous les bureaux de poste de France, d'Algérie, de Belgique, de Danemark, d'Italie, de Norvège, des Pays-Bas, de Suède et de Suisse sont autorisés à recevoir les abonnements. L'éditeur des *Nouvelles Annales de Mathématiques* prend à sa charge la remise perçue par l'Administration, et il suffit de verser à un bureau de poste, sans frais supplémentaires, le montant de l'abonnement.

EDMOND LAGUERRE, SA VIE ET SES TRAVAUX (¹);

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,
Examinateur de sortie à l'Ecole Polytechnique,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

I.

Edmond Laguerre a vécu modeste et tranquille, loin des agitations mondaines, entre ses livres, sa famille et quelques amis dévoués. Ses recherches scientifiques, les exigences du devoir professionnel, son affection pour son aimable compagne, enfin l'éducation de ses deux filles l'ont absorbé pleinement; aucun autre plaisir n'a eu d'attraits pour lui, et, à notre époque de désirs impatients et d'ambition fébrile, Laguerre a su ne puiser ses joies qu'aux sources pures du devoir et du travail.

Né à Bar-le Duc, le 9 avril 1834, il a fait ses études dans divers établissements d'instruction publique, ses parents l'ayant successivement déplacé pour qu'il eût sans cesse auprès de lui un compagnon chargé de veiller sur sa santé déjà précaire. Partout, au collège Stanislas, au lycée de Metz, à l'Institution Barbet, à l'École Polytechnique, il se fit remarquer par sa rare intelligence et par une aptitude singulière pour les langues vivantes et pour les sciences mathématiques. Certes, il n'était pas un de ces élèves qu'aucune étude ne captive au delà de l'heure réglementaire, et qui s'appliquent à toute chose avec une ardeur égale et prudemment contenue. Ses camarades, il faut bien le dire, l'ont vu plus d'une fois plan-

(¹) Extrait du *Journal de l'École Polytechnique*, LVIᵉ Cahier.

ter là son lavis ou son dessin graphique pour courir après une idée qui hantait son esprit. C'est pourquoi, entré à l'École le quatrième, il n'était classé que le quarante-sixième à la sortie; mais, en revanche, il avait déjà débuté dans la carrière scientifique par un coup de maître, et nous admirions tous cet étonnant garçon qui, étant encore sur les bancs, trouvait la solution complète du problème de la transformation homographique des relations angulaires, solution qui avait échappé à Chasles et à Poncelet et qui comblait une lacune regrettable de la *Géométrie supérieure*. Le bon Terquem entrevit immédiatement toute la portée de ce brillant début. « Profond investigateur en Géométrie et en Analyse », écrivait-il dès lors dans ses *Annales*, « le jeune Laguerre possède un esprit d'abstraction excessivement rare, et l'on ne saurait trop encourager les travaux de cet homme d'avenir. »

Cependant, Laguerre se tut pendant dix ans. Homme de devoir avant tout, son métier d'officier d'artillerie le prit d'abord tout entier, et ses camarades de garnison pourraient dire avec quel zèle il s'appliquait à tous les détails d'un service si peu en harmonie avec ses allures et avec ses goûts. Puis, envoyé à la manufacture d'armes de Mutzig, il put à loisir s'y livrer à ses études favorites; son isolement, comme autrefois le séjour de Poncelet à Saratof, lui fut éminemment favorable, et, en 1864, lors de sa nomination comme répétiteur à l'École Polytechnique, il revint à Paris solidement armé pour reparaître sur l'arène scientifique.

De 1865 à 1886, Laguerre n'a cessé d'émettre des idées originales et profondes sur les diverses branches des Mathématiques pures. Si la variétés des sujets rend ses Mémoires difficiles à classer, la concision avec laquelle il les rédigeait les rend encore plus impropres à l'analyse;

et, pour mettre son œuvre dans tout son jour, il faudrait en reproduire entièrement la majeure partie. Mais, si nul, mieux que lui, n'a observé les prescriptions de Boileau, nul aussi, il faut le reconnaitre, n'a su, en se bornant, mettre dans des écrits plus de précision et de clarté. Que de fois l'ai-je entendu s'élever vivement contre la prolixité de certains auteurs plus sobres d'idées que de mots! « Quand on veut être lu », répétait-il sans cesse, « on ne délaye pas en cent pages un sujet dont le développement en exige à peine dix. » Qu'on me pardonne ces détails; mon esprit est encore plein du souvenir de ces causeries intarissables et charmantes dont nos tournées pour l'admission à l'École Polytechnique nous fournissaient l'heureuse occasion. Déjà liés d'amitié avant notre entrée à l'École, puis associés pendant longtemps à la même besogne, nous avions un profond attachement l'un pour l'autre, et j'ai pu, mieux que personne, je le dis non sans fierté, apprécier son savoir si étendu et sa loyauté si parfaite, constater sa bienveillance inépuisable sous des dehors parfois un peu brusques, et pénétrer les nobles qualités de ce cœur peu prodigue de ses trésors.

II.

L'œuvre de Laguerre se compose de 140 Notes ou Mémoires que l'on peut rattacher à huit chefs principaux :

Emploi des imaginaires en Géométrie;

Application du Calcul intégral et de la théorie des formes à la Géométrie;

Géométrie infinitésimale;

Géométrie de direction;

Méthodes d'approximation pour certaines fonctions analytiques;

Résolution numérique des équations ;
Équations différentielles et fonctions elliptiques.

Nous consacrerons un paragraphe à chacune de ces séries de travaux, en suivant l'ordre même que nous venons d'indiquer.

III.

Le premier travail de Laguerre, nous l'avons déjà dit, est relatif à la transformation homographique des relations angulaires.

On sait, depuis Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires situés sur la droite à l'infini de ce plan. Laguerre donne à ces points I et J le nom d'*ombilics* du plan ; et il appelle *droite isotrope* toute droite menée par un ombilic. Les droites isotropes d'un plan forment deux systèmes distincts : le premier est composé de droites parallèles entre elles, mais passant par I ; le second de droites aussi parallèles entre elles, mais passant par J. De chaque point du plan partent deux droites isotropes de systèmes différents et dont l'ensemble forme un cercle de rayon nul. Le plan étant réel, toute droite isotrope renferme un point réel, mais un seul : c'est celui ou elle coupe la droite isotrope qui lui est imaginairement conjuguée.

Cela posé, voici le principe sur lequel repose la solution du problème de la transformation homographique des relations angulaires :

Le rapport anharmonique ρ *du faisceau formé par les deux côtés d'un angle* θ *et par les droites isotropes passant par son sommet est égal à*

$$e^{2\theta i};$$

d'où l'on déduit

$$\theta = \frac{1}{2i}\log\rho,$$

les logarithmes étant népériens et la lettre i désignant le symbole $\sqrt{-1}$.

D'après cela et en vertu de la projectivité du rapport anharmonique, si plusieurs angles $A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n$, situés dans un même plan, satisfont à une relation d'ailleurs quelconque

$$F(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n) = 0,$$

les angles correspondants $A'_1, \ldots, A'_k, \ldots, A'_n$ de la figure homographique seront liés par la relation

$$F\left(\frac{1}{2i}\log a_1, \ldots, \frac{1}{2i}\log a_k, \ldots, \frac{1}{2i}\log a_n\right),$$

a_k désignant en général le rapport anharmonique que les deux côtés de l'angle A'_k forment avec les droites qui joignent son sommet aux points qui correspondent aux ombilics de la première figure.

Par exemple, si l'on applique la transformation à ce théorème élémentaire, *la somme des angles d'un polygone plan est un multiple de deux angles droits,* on tombe sur le théorème de Carnot relatif aux segments qu'une transversale détermine sur les côtés d'un polygone.

Laguerre exposa, quinze ans plus tard, sa doctrine sur l'*emploi des imaginaires en Géométrie* dans un Cours qu'il professa à la salle Gerson et dont il n'a malheureusement publié que quelques Extraits, se contentant d'y puiser, à diverses reprises, le sujet d'importants travaux. Cette doctrine repose, en dernière analyse, sur trois notions fondamentales : la notion de l'angle rattachée, comme nous venons de le dire, à celle du rapport anharmonique, la distinction entre les foyers réels et les foyers singuliers, et enfin une représentation géométrique des points imaginaires situés soit dans un plan,

soit dans l'espace. Nous avons développé la première idée ; voici quelques explications sur les deux autres.

On nomme, d'après Plücker, foyer d'une courbe plane tout point tel que deux tangentes menées par ce point à la courbe passent respectivement par les ombilics du plan. Si la courbe ne passe pas par les points I et J, on peut mener, par chacun de ces ombilics, un nombre de tangentes égal à la classe μ de la courbe, d'où résultent deux faisceaux dont les intersections sont les μ^2 foyers de cette ligne ; μ de ces foyers sont réels et suffisent, d'ailleurs, pour déterminer les autres. Mais, si la courbe passe par I et J, les faisceaux des tangentes menées par ces deux points forment deux groupes ; le premier groupe est composé des tangentes dont le point de contact n'est pas un ombilic, et, si k est le nombre des branches de la courbe qui passent par chacun des points I et J, ce premier groupe contient $\mu - 2k$ foyers réels que Laguerre nomme *foyers ordinaires* comme les foyers trouvés dans le cas précédent. Le second groupe, formé par les tangentes ayant leur point de contact en l'un des ombilics sur la droite de l'infini, donne k foyers réels que l'on doit compter comme doubles et que Laguerre nomme *foyers singuliers*. Telle est la distinction entre les foyers ordinaires et les foyers singuliers dont Laguerre a révélé l'importance en montrant combien différents étaient leurs rôles en Geométrie plane et particulièrement dans la théorie des courbes du quatrième ordre qui ont les ombilics pour points doubles, et que M. Moutard, en les considérant à un autre point de vue, avait qualifiées d'*anallagmatiques*.

Quant au mode de représentation géométrique des points imaginaires, il découle immédiatement, pour le plan, de la considération des droites isotropes ; il consiste à représenter tout point imaginaire A par le seg-

ment aa' que déterminent les deux points réels a et a' situés respectivement sur les deux droites isotropes passant par A. On montre aisément que la position de ce segment représentatif est indépendante du choix des axes de coordonnées, et l'on voit en outre que, lorsque le point A est réel, les points a et a' se confondent avec lui, en sorte que le cas d'un point réel est contenu dans le cas général du point imaginaire. L'étude complète d'une courbe consistera dans la recherche du mode de distribution des segments représentatifs de ces divers points. Ainsi l'on trouve que : *pour qu'un segment* (aa') *représente un point situé sur un cercle réel, il faut et il suffit que les points* a *et* a' *soient réciproques par rapport à ce cercle*, et que, *pour qu'un segment* (aa') *représente un point situé sur une ellipse réelle, il faut et il suffit que les deux points* a *et* a' *appartiennent à une hyperbole homofocale à l'ellipse et que la droite* aa' *soit parallèle à l'une des normales à l'ellipse en l'un des points où cette courbe rencontre l'hyperbole.* Le cas de la droite est le plus important : *Pour que plusieurs segments représentent des points situés sur une même ligne droite, il faut et il suffit que le polygone formé par les origines de ces segments et le polygone formé par leurs extrémités soient semblables et inversement placés.* Laguerre en déduit la solution graphique des problèmes relatifs à la ligne droite déterminée par les segments représentatifs de deux de ses points et donne ainsi le moyen de *réaliser* les constructions où entrent des données imaginaires. Là est en effet le nœud de la question, attendu que certains problèmes, dont la considération des imaginaires donne une solution théorique simple et souvent immédiate, ne sont *résolus effectivement* qu'autant que les constructions auxquelles conduit le mode de démonstration sont *réalisables*.

La représentation géométrique des points imaginaires dans l'espace n'est guère moins simple : mais il faut auparavant définir les plans et les cônes isotropes, ainsi que la conique ombilicale. Si par un point réel ou imaginaire on mène divers plans, chacun de ces plans contient deux droites isotropes passant par le point ; ces droites sont situées sur un même cône du second degré qu'on nomme *cône isotrope* et que l'on peut aussi considérer comme une sphère de rayon nul ayant le point donné pour centre, en sorte que toute section plane de ce cône est un cercle dont le centre est la projection du sommet du cône sur le plan. Tous les plans isotropes coupent le plan de l'infini suivant un même cercle commun à toutes les sphères de l'espace, et que Laguerre nomme *conique ombilicale*. Par une droite on peut, en général, mener deux plans tangents à l'ombilicale ; ce sont des *plans isotropes*. Le couple de plans isotropes passant par une droite donnée est coupé suivant deux droites isotropes par un plan perpendiculaire à cette droite. Enfin, par une droite isotrope, on ne peut mener qu'un seul plan isotrope, puisque cette droite coupe le plan de l'infini en un point de l'ombilicale.

Cela posé, soient a un point imaginaire de l'espace et a' son conjugué ; ces deux points sont les sommets de deux cônes isotropes qui se coupent suivant un cercle réel A dont le plan est perpendiculaire sur la droite réelle aa', dont le centre est le milieu O du segment aa' et dont le rayon est égal à R, Ri étant l'expression du segment Oa. Il est clair que les deux points imaginaires conjugués, a et a', définissent complètement le cercle A, et réciproquement ; c'est ce cercle réel A que Laguerre nomme le *cercle représentatif du couple* aa'. Il est vrai que, dans certaines questions, on peut vouloir distinguer ces deux points l'un de l'autre ; il suffit, à cet effet, d'ima-

giner que le cercle A soit parcouru dans un certain sens; ce sens déterminera celui des deux points dont on veut que le cercle soit la représentation. Pour étudier une courbe donnée par des équations supposées réelles, il suffira d'étudier les conditions auxquelles doit satisfaire le cercle réel A pour que les points imaginaires conjugués a et a', qu'il représente, appartiennent à la courbe. Ainsi, *pour qu'un cercle réel représente un couple de points imaginaires conjugués situés sur une ellipse réelle, il faut et il suffit que ce cercle appartienne à un hyperboloïde à deux nappes ayant cette ellipse pour focale.*

Nous ne pouvons suivre Laguerre dans les déductions si nombreuses qu'il n'a cessé, pendant vingt ans, de tirer de ces principes fondamentaux; pour ne pas dépasser notre but, qui est surtout de mettre en évidence les idées originales de l'auteur, nous nous bornerons à citer les résultats les plus saillants parmi ceux auxquels cette voie l'a conduit.

Ce sont :

1° Des théorèmes généraux sur les courbes algébriques, tels que les deux suivants :

Si, par un point M *pris dans le plan d'une courbe de degré n, on trace un cercle quelconque, de rayon* R, *le produit des distances de ce point aux $2n$ points communs au cercle et à la courbe est égal à la puissance du point* M *par rapport à la courbe, multipliée par le facteur* R^n.

Si, par un point M *pris dans le plan d'une courbe de classe m, on mène des tangentes à la courbe, l'orientation de ces tangentes est la même que celle du faisceau des droites joignant le point* M *aux m foyers de la courbe, et le centre harmonique du point* M *rela-*

tivement aux points de contact est le même que le centre harmonique de ce point relativement aux m foyers.

De ces propriétés métriques découlent de nombreuses conséquences relatives à la courbure des lignes et des surfaces; voici les plus curieuses :

Si d'un point A *de l'hypocycloïde à trois rebroussements on mène à la courbe la tangente dont le point de contact* T *diffère de* A, *il suffit de prolonger* TA *d'une quantité égale à elle-même pour obtenir le foyer de la parabole qui surosculc en* A *l'hypocycloïde.*

Si d'un point M *d'une conique sphérique on abaisse sur les deux focales réelles des perpendiculaires rencontrant la sphère en m et m', le conjugué harmonique* M, *par rapport à m et à m', appartient au plan osculateur de la courbe en* M. Ce théorème élégant n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une proposition relative à la *biquadratique sphérique*, c'est-à-dire à la ligne d'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre.

MT *étant la tangente en un point quelconque* M *d'une surface anallagmatique du quatrième ordre, et* P *et* Q *les deux autres points communs à la droite* MT *et à la surface;* C *désignant en outre le centre de la surface et* I *le milieu de la droite joignant les centres des deux sphères qui, passant par* M, *touchent respectivement la surface en* P *et* Q, *on aura le centre de courbure en* M *de la section normale passant par* MT *en menant par* M *une droite parallèle à* IC, *de même sens et de longueur double.* Pour l'intelligence de ce théorème, nous rappellerons qu'une surface anallagmatique du quatrième ordre peut être considérée de cinq manières

différentes, comme l'enveloppe de sphères qui coupent orthogonalement une sphère fixe, tandis que leur centre décrit une surface du second ordre; les cinq quadriques au moyen desquelles on peut ainsi décrire la surface sont homofocales, et c'est leur centre commun qu'on nomme *centre de la surface anallagmatique*. Ajoutons que, précédemment et presque simultanément, Laguerre et M. Darboux avaient trouvé une autre solution, mais bien moins élégante, du problème de la courbure des surfaces anallagmatiques.

2° Une étude ayant pour objet d'étendre aux courbes sphériques les notions des *foyers ordinaires* et des *foyers singuliers* et de montrer le rôle important que jouent, dans la théorie de la projection stéréographique, les génératrices imaginaires de la sphère.

Lorsqu'on projette stéréographiquement une courbe, *les foyers ordinaires de la courbe se projettent suivant les foyers ordinaires de sa transformée*. Mais il n'en est pas de même pour les foyers singuliers. *Les foyers singuliers de la transformée sont situés sur les polaires, par rapport à la sphère, des droites conjointes du pôle de transformation relativement à la courbe que le plan tangent à ce pôle détermine dans l'une quelconque des surfaces qui, avec la sphère, définissent la courbe.*

3° Des recherches générales sur les surfaces à génératrices circulaires et leur application aux surfaces anallagmatiques du quatrième ordre.

Laguerre est revenu plusieurs fois sur la théorie des lignes et des surfaces anallagmatiques. Dans une première Note, il a retrouvé le mode de description donné par M. Moutard pour les anallagmatiques planes considérées comme enveloppes de cercles, en le déduisant de l'existence de quatre cônes qui passent par une biquadratique sphérique; puis, dans deux autres écrits,

après avoir démontré, relativement aux surfaces anallagmatiques, plusieurs beaux théorèmes déjà énoncés par M. Moutard, Laguerre a fait connaître les propriétés toutes nouvelles des *focales ordinaires et singulières* de ces surfaces, ainsi que les curieuses relations qui existent entre les quadriques homofocales qui permettent leur génération ; de là résultent diverses propositions sur les surfaces homofocales du second ordre, par exemple la suivante :

Étant donnés deux surfaces homofocales du second degré et un plan arbitraire P, *si l'on prend respectivement sur chacune de ces surfaces un point m et un point m', tels que les plans tangents en ces points se coupent sur une droite située dans le plan* P, *toutes les droites telles que mm' sont normales à une même surface.*

4° Un Mémoire sur la *cyclide de Dupin*, renfermant beaucoup de propositions nouvelles sur les surfaces de tous les ordres ; nous signalerons spécialement la partie de ce travail qui concerne les *surfaces douées d'un axe de rotation.*

On dit qu'une surface Σ est douée d'un axe de rotation, s'il existe une droite D telle, qu'en faisant tourner Σ autour de D d'un angle arbitraire et désignant par Σ' sa nouvelle position, les surfaces Σ et Σ' se coupent sous un angle constant le long de leur intersection, et cela quel que soit l'angle de rotation. La recherche des surfaces douées d'un axe de rotation est un problème difficile. Laguerre a trouvé d'abord une solution contenant une fonction arbitraire; elle est fournie par des surfaces déjà étudiées par M. O. Bonnet et dont les deux systèmes de lignes de courbure sont composés l'un de cercles, l'autre de courbes sphériques; puis il a trouvé une deuxième solution entièrement distincte de

la première et renfermant aussi une fonction arbitraire. La cyclide de Dupin jouit de la singulière propriété d'appartenir à la fois aux deux espèces de surfaces et elle possède quatre axes de rotation, deux de la première espèce, deux de la seconde.

5° Des recherches sur les biquadratiques gauches, c'est-à-dire sur les lignes d'intersection de deux surfaces du second ordre, dont voici le point le plus important :

Étant données une surface du second ordre et deux droites fixes, Chasles avait démontré que, si une droite mobile rencontre les deux droites fixes en s'appuyant sur la surface, la courbe de contact était une biquadratique gauche. On pouvait se demander si, inversement, toute biquadratique gauche pouvait résulter d'un tel mode de génération et comment, dans le cas de l'affirmative, on pourrait déterminer la quadrique et les deux droites fixes. En empruntant à Clebsch ses principes sur l'application des fonctions elliptiques à la géométrie des courbes gauches, Laguerre a fait voir que, pour une biquadratique donnée, on peut toujours faire passer six quadriques permettant la génération indiquée par Chasles et que, l'une des surfaces étant choisie, on peut encore prendre d'une infinité de manières les deux droites fixes ; une circonstance assez remarquable est la rencontre en cette étude des *surfaces quadricuspidales*, déjà étudiées par de la Gournerie, et dont plusieurs belles propriétés ont été ainsi rattachées incidemment à la théorie des intégrales elliptiques.

Laguerre a en outre étendu à ces surfaces un beau théorème qu'il avait donné sur les surfaces du second ordre : *Si, par une ligne de courbure quelconque* K *d'une quadrique* A, *on mène une autre quadrique* A', *la surface développable circonscrite à* A *et* A' *touche* A

suivant une de ses lignes de courbure; de même, *si, par la biquadratique* K, *on mène une quadricuspidale quelconque* A'', *la développable circonscrite à* A *et* A'' *touche* A *suivant une de ses lignes de courbure.*

6° Une étude pleine d'intérêt sur les lignes que Laguerre a nommées *cassiniennes*. Ces courbes, dont le type est l'ellipse de Cassini, sont les anallagmatiques planes ou sphériques jouissant de cette propriété que l'on peut circonscrire à la conique qui les définit un quadrilatère inscrit dans le cercle directeur correspondant. Laguerre a fait connaître pour ces lignes plusieurs modes de génération fort élégants; par exemple :

Si une biquadratique sphérique est telle qu'une droite passant par deux points de cette courbe ait pour polaire, relativement à la sphère sur laquelle elle est tracée, une droite rencontrant la courbe en deux points, cette ligne est une cassinienne.

Si une droite s'appuie sur les droites fixes en restant tangente à une sphère, cette courbe de contact est une cassinienne.

Il a, de plus, indiqué une manière d'associer deux à deux les points d'une cassinienne qui facilite extrêmement l'étude de la courbe et conduit à des propriétés fort remarquables :

Si l'on prend le conjugué harmonique d'un point fixe quelconque de la sphère relativement à chacun des couples de points associés d'une cassinienne, le lieu de ces points conjugués est un cercle.

Si a *et* b, c *et* d *sont les points diamétralement opposés à deux couples quelconques* A *et* B, C *et* D *de points associés d'une cassinienne, et si* M *désigne un point quelconque de la courbe, la différence des aires des triangles sphériques* Mab, Mcd *reste constante.*

7° Laguerre retrouve les cassiniennes en partant d'un point de vue tout autre dans un Mémoire *Sur quelques propriétés des foyers des courbes algébriques et des focales des cônes algébriques.*

La proposition fondamentale, dans ces nouvelles recherches, est la suivante :

La polaire d'un point quelconque M *du plan d'une courbe de* $m^{ième}$ *classe, par rapport aux droites obtenues en menant par chacun des m foyers réels une perpendiculaire sur la droite qui joint ce foyer au point* M, *se confond avec la polaire de ce même point* M *par rapport aux normales à la courbe, qui ont pour pieds les points de contact des tangentes issues du point* M.

Après avoir déduit de là ce beau théorème de Liouville : *Si, aux points de rencontre d'un cercle et d'une courbe plane, on mène les normales à la courbe, la polaire du centre du cercle par rapport à ces normales est située à l'infini.* Laguerre en fait l'application aux coniques homofocales, ce qui le conduit à cette proposition remarquable :

Si l'on abaisse d'un point des normales à l'une quelconque des coniques ayant pour foyers deux points donnés F *et* F′, *les tangentes menées aux pieds des normales forment un quadrilatère complet, dont les six sommets sont trois couples de points associés d'une cassinienne cubique, que ces sommets décrivent lorsque la conique varie. Ces tangentes roulent en même temps sur une parabole dont le foyer est le conjugué harmonique du point* M *par rapport à* F *et à* F′.

L'auteur étend ensuite aux cônes algébriques les propriétés qui précèdent et déduit de là le moyen de construire, relativement à une arête donnée, l'axe de cour-

bure et même l'accélération de courbure d'un cône du second ordre dont on connaît les focales.

8° Un Mémoire *Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés.*

Cette courbe, du quatrième degré et de la troisième classe, doublement tangente à la droite de l'infini, renferme dans son équation six constantes arbitraires, et, comme quatre points donnés introduisent huit constantes, il en résulte que la même courbe peut être regardée d'une infinité de manières comme l'enveloppe des axes d'une conique assujettie à passer par quatre points. Laguerre se propose de déterminer, pour une courbe donnée de la troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini, les divers systèmes de quatre points qui donnent lieu au mode de génération indiqué. La solution repose sur cette propriété curieuse :

L'enveloppe des axes des coniques circonscrites à un quadrangle donné ABCD *est l'enveloppe des asymptotes des coniques circonscrites au quadrangle dérivé, c'est-à-dire au quadrangle dont les sommets sont les centres des cercles circonscrits aux triangles* ABC, BCD, CDA, DAB.

Parmi les théorèmes qu'il en déduit, nous remarquerons le suivant :

Les asymptotes des coniques passant par les sommets d'un triangle et par le point de concours des hauteurs enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements, tandis que les axes de ces courbes enveloppent la ligne symétrique de cette hypocycloïde relativement à son centre.

Étendant ensuite ses recherches à la géométrie à trois dimensions, l'auteur étudie la distribution dans l'espace des axes des quadriques de révolution, passant par quatre ou cinq points donnés; il démontre en particulier cette proposition :

Cinq points étant donnés sur une quadrique de révolution, les centres des cinq sphères circonscrites aux cinq tétraèdres que l'on peut former en groupant ces points quatre à quatre sont situés sur une cubique gauche ayant pour asymptote l'axe de la surface.

Il montre enfin que la plupart des résultats obtenus ne sont que des cas particuliers de théorèmes plus généraux, relatifs aux lignes spiriques et aux surfaces engendrées par la rotation de ces lignes autour de leur axe.

Ces *lignes spiriques,* dont il avait signalé dans un travail antérieur une série de propriétés, sont des anallagmatiques planes du quatrième ordre, possédant un axe de symétrie. Une telle courbe a deux foyers singuliers situés sur l'axe de symétrie : si ces foyers coïncident, elle devient un ovale de Descartes; si l'un des foyers singuliers est rejeté à l'infini, elle s'abaisse au troisième degré; enfin, elle se réduit à une conique, si les deux foyers singuliers passent à l'infini. Nous citerons seulement, parmi les propriétés que Laguerre a fait connaître, celle qu'il considérait comme fondamentale :

Si l'on joint un point mobile sur une spirique à deux points fixes de la courbe, les perpendiculaires élevées sur les milieux des deux cordes ainsi obtenues tracent sur l'axe de symétrie deux divisions homographiques ayant pour points doubles les foyers singuliers de la courbe; d'où l'on déduit aisément que, *un quadrangle*

étant inscrit dans une spirique, les sommets du quadrangle dérivé et les deux foyers singuliers de la courbe appartiennent à une même conique.

9° A cette étude sur la spirique se rattache une monographie intéressante sur la *cardioïde*, renfermant beaucoup de propriétés nouvelles.

La cardioïde est l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile qui roule sans glisser sur un cercle de même rayon. Elle dérive de la spirique générale, lorsque les points doubles à l'infini deviennent des points de rebroussement et que les deux foyers singuliers se confondent en un seul F. La division homographique dont nous avons parlé à la fin de l'alinéa précédent a ses deux points doubles réunis en F, et l'on obtient ce théorème :

Si l'on joint un point mobile de la cardioïde à deux points fixes de la courbe, et qu'on nomme I *et* K *les points où l'axe de symétrie rencontre les perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes ainsi obtenues, la différence*

$$\frac{1}{FI} - \frac{1}{FX}$$

reste constante.

D'autres propriétés résultent d'ailleurs de l'application à la cardioïde des théorèmes généraux que nous avons énoncés ci-dessus (1°). De la combinaison des deux points de vue résulte une théorie simple et élégante de cette courbe qui rentre d'ailleurs dans le groupe des unicursales de troisième classe, dont Laguerre a donné un mode de génération digne d'être remarqué :

Une courbe de troisième classe est unicursale, si un cercle jouit de la propriété que deux tangentes, menées

à la courbe par chacun de ses points, soient à angle droit. Le cercle touche la courbe en trois points et les normales menées au cercle en ces points sont tangentes à la courbe.

10° Citons enfin deux Notes auxquelles Laguerre attachait quelque prix et qui ont pour objet *la relation qui existe entre un cercle circonscrit à un triangle ou à un quadrilatère, et les éléments d'une conique inscrite dans le même polygone.*

Poncelet a montré que, si un triangle est à la fois inscrit dans un cercle C et circonscrit à une conique, on peut inscrire et circonscrire à ces deux courbes une infinité de triangles. Mais quelle relation doit-il exister dans ce cas entre les éléments de la conique et du cercle? Telle est la question que Laguerre s'est posée, et voici la solution qu'il a donnée : F et G étant les deux foyers de la conique, O le centre du cercle, F′ et G′ les points réciproques de F et G relativement au cercle, si l'on mène, par F, la parallèle à OG jusqu'à sa rencontre R avec GF′, la longueur de l'axe focal est moyenne proportionnelle entre GR et GF′.

Dans le cas du quadrilatère, D étant le point de rencontre de FG′ et GF′, si l'on mène par F la parallèle à OD jusqu'à sa rencontre R avec GF′, la longueur de l'axe focal est moyenne proportionnelle entre GR et GF′.

IV.

Passons maintenant à l'application du Calcul intégral et de la théorie des formes à la Géométrie.

En développant la belle interprétation géométrique, donnée par Jacobi, de l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

où f désigne un polynôme du quatrième degré, Laguerre a été conduit à donner à l'intégrale une forme remarquable par sa simplicité :

Si l'on décompose, d'une façon quelconque, le polynôme $f(x)$ en deux facteurs du second degré $\theta(x)$ et $\varphi(x)$, l'intégrale générale de l'équation d'Euler est

$$\sqrt{\theta(x)\varphi(y)} - \sqrt{\theta(y)\varphi(x)} = C(x-y),$$

C *désignant une constante arbitraire.*

Parmi les propriétés des cubiques gauches et des cônes du second degré, que Laguerre a rattachées à cette intégration, nous appellerons surtout l'attention sur une construction géométrique fort ingénieuse et relative à l'addition des fonctions ultra-elliptiques de première espèce ; cette construction repose sur le théorème suivant :

Étant donnés sur une cubique gauche six points dont les paramètres sont les racines de l'équation du sixième degré $V = 0$, si l'on considère un quelconque des cônes du second ordre qui passent par ces six points et deux plans tangents à ce cône, on aura les deux relations

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{V(x)}} + \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{V(y)}} + \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{V(z)}} = 0,$$
$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{V(x)}} + \int_{y_0}^{y_1} \frac{y\,dy}{\sqrt{V(y)}} + \int_{z_0}^{z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{V(z)}} = 0,$$

où x_0, y_0, z_0 désignent les paramètres des points où le premier plan coupe la cubique et x_1, y_1, z_1 les paramètres des points où la cubique est rencontrée par le second plan.

On remarquera l'analogie de ces résultats avec ceux

donnés par Jacobi relativement aux fonctions elliptiques : Jacobi obtenait la construction de l'addition des fonctions elliptiques en faisant rouler une droite sur l'une quelconque des coniques qui passent par quatre points fixes dont la position détermine un polynôme du quatrième degré ; Laguerre effectue géométriquement la construction des fonctions ultra-elliptiques de première espèce en faisant rouler un plan sur l'un quelconque des cônes du second degré qui passent par six points fixes dont la position, sur la cubique gauche qui les renferme, détermine un polynôme du sixième degré.

C'est au lien intime qui existe entre la décomposition en trois carrés du polynôme du sixième degré et le problème relatif à la construction des cônes du second degré qui passent par six points de l'espace, qu'est due ici l'introduction, à côté du Calcul intégral, de la théorie des formes algébriques.

Voici maintenant des recherches géométriques où cette dernière théorie intervient d'une manière exclusive et plus complète. Ces recherches concernent successivement les lignes planes, les surfaces réglées du second ordre, et enfin la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner.

Considérons d'abord les lignes planes.

Une première étude est fondée sur la considération de l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ qui a pour racines les coefficients angulaires des tangentes menées du point (x, y) à une courbe de classe n dont on a l'équation tangentielle $F(u, v, w) = 0$. Laguerre donne à l'équation $U = 0$, qui est du degré n et dont les coefficients sont des polynômes entiers en x et y, le nom d'*équation mixte* de la courbe, et il indique le moyen de former les équations mixtes des courbes que l'on obtient en égalant à zéro les covariants de $F(u, v, w)$, ce qui le

conduit, en particulier, à une méthode simple pour trouver l'équation de la cayleyenne d'une courbe algébrique.

L'équation mixte joue un rôle considérable dans l'étude des singularités des courbes planes de quatrième classe; on sait qu'une telle courbe K possède 28 points doubles δ et 24 points de rebroussement ρ; il existe en outre dans son plan 21 droites P, telles que la première polaire de chacune d'elles, relativement à K, se décompose en un point p et une conique résiduelle; aux 21 droites P correspondent 21 points p, et les 73 points δ, ρ, p sont les points communs à trois courbes dont les équations s'expriment simplement en fonction de

$$\frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{\partial S}{\partial y}, \quad \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial y},$$

S et T désignant l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme $U(\lambda, \mu)$ qui, égalée à zéro, constitue l'équation mixte de la courbe K. Soient K et K' deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe, ayant pour équations mixtes $U = 0$ et $U' = 0$, on dit que les faisceaux de droites dont ces équations donnent les coefficients angulaires sont harmoniques lorsque l'invariant quadratique I des deux formes U et U' est égal à zéro; le lieu des points d'où l'on voit les courbes K et K' sous deux faisceaux harmoniques est, d'après cela, une courbe $I = 0$ de degré n; Laguerre lui donne le nom de *courbe harmonique* du couple K et K'; si n est impair, cette ligne est également la courbe harmonique de deux quelconques des courbes du faisceau que K et K' déterminent, et elle prend alors le nom de *courbe harmonique* de ce faisceau. On déduit de là plusieurs propositions remarquables :

Si l'on considère les différentes droites que l'on peut

mener par un point M *et si l'on prend leurs premières polaires par rapport à une courbe* K *de quatrième classe, ces polaires forment un faisceau de courbes de troisième classe dont la courbe harmonique est la droite polaire du point* M *par rapport à la courbe du quatrième ordre* Σ *qui passe par les 24 points de rebroussement de* K. En particulier, *les* 21 *droites* P *sont les droites polaires relativement à* Σ *des* 21 *points p.*

Une courbe quelconque de troisième classe et sa hessienne sont vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques.

Laguerre donne en outre la *condition pour que les* 28 *points doubles d'une courbe de quatrième classe soient situés sur une courbe du sixième ordre.*

Ajoutons, pour achever de montrer l'importance de l'*équation mixte* dans la théorie des courbes, que Laguerre en déduit, pour l'hypocycloïde à trois points de rebroussement, un nombre très considérable de propriétés nouvelles, parmi lesquelles nous énoncerons seulement les deux suivantes :

P *et* Q *étant les points où une droite* D, *tangente à une hypocycloïde à trois rebroussements, coupe cette courbe, si le sommet d'un angle de grandeur constante décrit la droite* D, *tandis que l'un des côtés reste tangent à la courbe, l'autre côté de l'angle enveloppe une autre hypocycloïde égale à la première, tangente à* D *et passant par les points* P *et* Q.

M *étant un point mobile sur une ellipse* E *qui passe par un point fixe* A *et qui se projette sur un plan* P *suivant un cercle, le plan perpendiculaire sur le milieu de la corde* AM *coupe le plan* P *suivant une droite qui enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. Si le point* A *se déplace sur l'ellipse, l'hypocycloïde se*

déplace dans le plan P *en restant égale à elle-même. Les traces, sur le plan* P, *des plans normaux à l'ellipse enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement, et les deux tangentes doubles de rebroussement de cette courbe sont le lieu des centres des sphères doublement tangentes à l'ellipse.*

Il faut encore rattacher à ces études deux Mémoires : l'un *Sur les courbes du quatrième ordre qui ont trois points doubles d'inflexion*, l'autre *Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes.*

La courbe K du quatrième degré, étudiée dans le premier de ces Mémoires, jouit de nombreuses propriétés qui prennent surtout une forme simple dans le cas particulier où deux des points doubles d'inflexion sont les ombilics du plan; la courbe est alors le lieu des projections du centre d'une hyperbole équilatère sur ses tangentes, c'est-à-dire la *lemniscate* de Bernoulli. Sans entrer dans les détails de cette monographie si bien faite, nous indiquerons seulement les propriétés fondamentales de la courbe K.

La cubique polaire d'un point M *de la courbe se décompose en une droite*, qu'on appelle la droite harmonique du point M, *et en une conique qui passe par les trois points doubles et touche la courbe au point* M.

Si d'un point M *de la courbe on mène les quatre tangentes dont le point de contact est distinct de* M, *les quatre points de contact sont sur la droite harmonique de* M.

Les six pôles d'une droite par rapport à la courbe sont les sommets du quadrilatère complet formé par les droites harmoniques des points où la droite considérée rencontre la courbe.

La développée d'une conique ayant trois tangentes

doubles, sa corrélative rentre dans l'espèce étudiée. Les propriétés obtenues peuvent donc être regardées comme des propriétés relatives aux développées des coniques. Nous citerons seulement celle-ci :

Si l'on considère les quatre points où une tangente quelconque à la développée K *d'une ellipse coupe cette courbe* K, *les tangentes menées en ces points à cette développée concourent en un même point.*

Le dernier Mémoire a un caractère plus général. Il a pour objet l'étude du réseau des courbes du $n^{ième}$ ordre que représente, lorsqu'on fait varier les paramètres ξ et η, l'équation

$$A\xi + B\eta + C = 0,$$

dans laquelle A, B, C désignent trois polynômes du $n^{ième}$ degré en x et y, liés d'ailleurs par la relation

$$Ax + By + C = 0.$$

Par deux points quelconques du plan passe une courbe du réseau. Une telle courbe est déterminée par les valeurs de ξ et η; elle passe d'ailleurs par le point qui a pour coordonnées ξ et η et qui prend le nom de *point principal*. Cela posé, on a les propositions suivantes :

Toutes les courbes du réseau passent par $(n^2 - n + 1)$ *points fixes ou pivots. Deux courbes quelconques du réseau ont en commun, outre les pivots,* $n - 1$ *points, qui sont situés en ligne droite, et le* $n^{ième}$ *point où cette droite rencontre l'une quelconque des courbes est le point principal de cette courbe.*

Les courbes du réseau, qui ont pour points principaux les points d'une droite, ont en commun $n - 1$ *points situés sur cette droite et qu'on nomme* points

centraux de la droite. *Si une droite tourne autour d'un point fixe, le lieu de ses points centraux est la courbe du réseau, ayant ce point fixe pour point principal.*

Si, par chaque point du plan, on mène à la courbe du réseau ayant ce point pour point principal, les tangentes dont le point de contact est distinct de M : 1° *toutes ces droites enveloppent une courbe* K *de la classe* $(n^2 - n + 1)$, *et du degré* $3(n - 1)$ *qui est le lieu des points principaux des courbes du réseau ayant un point double;* 2° *les points de contact de toutes ces tangentes appartiennent à une courbe* H, *qui est le lieu des points doubles du réseau.*

Si deux courbes de degré n ont $n - 1$ *points communs en ligne droite, leurs* $n^2 - n + 1$ *autres points communs sont les pivots d'un réseau de l'espèce considérée.* En particulier, *les courbes du troisième degré passant par sept points fixes forment un réseau de cette espèce;* c'est des propriétés de ce réseau spécial que M. Aronhold a déduit sa belle *construction de la courbe du quatrième ordre ayant pour tangentes doubles sept droites données.*

Si des seize points communs à deux courbes du quatrième ordre trois sont situés en ligne droite, deux courbes quelconques du même ordre passant par les treize autres points communs se rencontrent en trois nouveaux points situés en ligne droite.

Considérons maintenant les courbes tracées sur une surface du second ordre S.

La surface S possède un double système de génératrices rectilignes; pour la commodité du langage, on nommera *directrices* les génératrices d'un système en conservant le nom de *génératrices* à celles du système opposé. Soit enfin K une conique prise arbitrairement sur

la surface et qu'on appellera *conique fondamentale :* les points de cette conique répondent respectivement aux valeurs successives d'un paramètre variable. Par chaque point M de la surface S passe une directrice coupant la conique fondamentale en un seul point dont le paramètre sera désigné par x; de même par le point M passera une génératrice coupant la conique K en un seul point dont le paramètre sera désigné par y. Laguerre prend les quantités x et y comme les coordonnées du point M, en sorte que l'équation $f(x, y) = 0$, d'une courbe tracée sur la quadrique S, indique, par son degré p par rapport à x, en combien de points la courbe coupe une génératrice quelconque, et par son degré q, par rapport à y, en combien de points la courbe rencontre l'une quelconque des directrices. Après avoir rendu cette équation homogène en remplaçant x et y par $\frac{x}{x'}$ et $\frac{y}{y'}$, il parvient, par la considération des émanants d'une forme binaire, à montrer qu'on obtient cette équation en égalant à zéro un polynôme ordonné suivant la puissance de $xy' - yx'$ et qui est un covariant double de certains polynômes U, V, W, ... entiers en x et x' et de degrés $p + q$, $p + q - 2$, $p + q - 4$, ... L'étude de la courbe considérée se trouve ainsi rattachée à l'étude simultanée de ces formes; on pourra toujours, dans un calcul relatif à un système de courbes, faire en sorte qu'on n'ait à considérer que des invariants ou des covariants d'un système de formes binaires et profiter de leurs propriétés connues pour en déduire des propriétés géométriques du système des courbes, ou pour simplifier les opérations. Suivant le choix de la conique fondamentale, l'équation d'une courbe donnée varie, et l'art consiste à obtenir l'équation qui renferme le moins de formes possible. Ainsi, l'équation des cubiques gauches

peut, d'une infinité de manières, être ramenée à ne contenir qu'une forme binaire cubique; celle de la biquadratique (intersection de la surface S et d'une autre quadrique n'ayant aucune génératrice commune avec la première) peut être mise, de quatre façons différentes, sous une forme où n'apparaît qu'un seul polynôme du quatrième degré; enfin, pour la quartique gauche (courbe du quatrième ordre par laquelle on ne peut faire passer qu'une surface du second degré), on peut, mais d'une seule manière, ramener son équation à ne renfermer qu'une seule forme biquadratique.

La surface réciproque de celle de Steiner est la surface S du troisième degré qui contient les six arêtes d'un tétraèdre. On voit, en effet, immédiatement que sa réciproque, c'est-à-dire le lieu des pôles de ses plans tangents, par rapport à une quadrique, est une surface S′ du quatrième ordre jouissant de la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents, c'est-à-dire la surface qu'on nomme habituellement *surface de Steiner*. Laguerre a consacré à la surface S deux beaux Mémoires, l'un d'Analyse, l'autre de Géométrie. Le premier a pour point de départ les considérations suivantes : Si l'on désigne par a, b, c, d, e des fonctions linéaires des coordonnées x, y, z, u, l'équation

$$U = (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu) = 0$$

représente un plan mobile enveloppant la surface développable

$$I^3 - 27J^2 = 0,$$

où I et J représentent l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme U; les polynômes a, b, c, d, e sont d'ailleurs reliés par une relation linéaire et homogène dont Laguerre rattache habilement les coefficients

numériques à une autre forme binaire. L'équation J = o représente précisément la surface du troisième ordre S réciproque de celle de Steiner, et l'on voit ainsi que l'étude de cette surface se ramène à la théorie de deux formes biquadratiques simultanées dont l'invariant quadratique est nul. En particulier, comme la quadrique I = o coupe évidemment la surface S suivant une de ses lignes asymptotiques, on voit que la recherche du système complet de ces courbes, dont la découverte appartient d'ailleurs à Clebsch, revient à la solution du problème suivant : *En donnant aux polynômes* a, b, c, d, e *toutes les valeurs telles que* J *conserve la même forme, quelles sont les valeurs que peut prendre l'invariant* I? Laguerre résout ce problème et donne en outre un très grand nombre de propriétés nouvelles de la surface et des courbes gauches qui s'y rattachent; comme il faut se borner, nous mentionnerons seulement la propriété suivante, à cause de sa simplicité :

Si, par un point de la surface S, *on mène le cône circonscrit à cette surface, ce cône se décompose en deux cônes du second degré; chacun d'eux touche la surface suivant une cubique gauche, et les surfaces développables ayant ces cubiques pour arêtes de rebroussement coupent la surface* S *suivant les deux lignes asymptotiques qui se croisent au point* M.

Quant au Mémoire de Géométrie pure que Laguerre a écrit sur le même sujet, il a pour point de départ un mode particulier de représentation de la surface S sur un plan; de ce mode résultent la plupart des théorèmes auxquels l'auteur avait déjà été conduit par l'analyse ci-dessus, ainsi que d'autres propositions, par exemple :

Si les trois faces d'un trièdre touchent la surface S

en trois points situés en ligne droite, parmi les neuf points où les arêtes du trièdre rencontrent la surface, il en est trois qui sont situés sur une même ligne asymptotique.

Pour achever le compte rendu de la partie de l'œuvre de Laguerre qui est relative à la Géométrie analytique, il nous reste à parler des travaux sur les normales aux courbes et aux surfaces du second ordre.

On aperçoit de suite comment la théorie des formes s'introduit naturellement dans cette étude. En général, trois droites passant par un même point M ne sont pas normales à une conique ayant pour axes deux droites données; $u = 0$ étant l'équation du troisième degré qui détermine les directions des axes et celle de la droite qui joint leur intersection au point M, et $u' = 0$ étant l'équation qui détermine les directions des trois droites issues du point M, la condition nécessaire et suffisante pour que ces trois droites soient normales à la conique ayant pour axes les deux droites données est $\Delta = 0$; Δ désigne l'invariant des formes cubiques u et u', invariant qui s'offre d'ailleurs dans beaucoup d'autres questions de Géométrie, notamment dans la théorie des cubiques gauches.

Après avoir retrouvé par une voie nouvelle les résultats si élégants de Joachimstahl sur les normales aux coniques et aux quadriques, Laguerre obtient une série de propriétés nouvelles parmi lesquelles nous citerons, d'abord relativement aux coniques, les théorèmes suivants :

Si l'on joint un point quelconque M *au centre d'une conique et si l'on mène par ce point des parallèles aux axes de cette courbe, les trois droites ainsi obtenues sont telles que la conjuguée harmonique de chacune*

d'elles relativement aux deux autres se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux quatre normales que l'on peut mener du point M *à la conique.*

U *étant la forme du quatrième degré qui, égalée à zéro, détermine les directions des normales menées du point* M *à une conique, et* H *et* S *étant le hessien et l'invariant quadratique de cette forme, l'équation*

$$U + \sqrt{\frac{S}{3}} H = 0$$

détermine les directions des droites joignant le point M *aux centres des cercles circonscrits aux quatre triangles formés par les pieds des quatre normales pris trois à trois.*

Puis, sur les surfaces du second ordre, outre la généralisation du premier des deux théorèmes qui précèdent, les propositions que voici :

Le centre de la sphère qui contient les pieds de quatre des normales abaissées d'un point M *sur une quadrique est le milieu du segment qui sépare le point* M *du point dont la projection sur les axes de la quadrique sont les intersections de ces axes avec le plan des deux autres normales.*

Les pieds des six normales que l'on peut abaisser d'un point M *sur une quadrique, ainsi que le point* M *et le centre* O *de la surface, appartiennent à une même cubique gauche; et, si, par le point* O*, on mène un plan parallèle à deux quelconques des normales, ce plan coupe les cubiques en deux points situés sur la sphère qui contient les pieds des quatre autres normales.*

Mentionnons enfin le problème suivant qui a quatre solutions et que Laguerre résout à l'aide de la règle et du compas : *Déterminer toutes les coniques qui, passant*

par un point donné, sont normales à quatre droites concourantes.

V.

C'est un théorème de M. Bertrand qui a provoqué les premières études de M. Laguerre sur la Géométrie infinitésimale.

M. Bertrand avait démontré depuis longtemps que les normales principales d'une courbe gauche ne peuvent être les normales principales d'une autre courbe, à moins qu'il n'existe une relation linéaire entre les deux courbures de la ligne donnée. Laguerre a fait voir que, si une surface réglée est applicable sur un hyperboloïde de révolution, sa ligne de striction est une des courbes étudiées par M. Bertrand, et que, réciproquement, on peut toujours considérer une telle courbe comme la ligne de striction d'une surface réglée applicable sur un hyperboloïde de révolution.

Nous ne pouvons citer tous les résultats, souvent utilisés depuis, dont Laguerre a enrichi cette branche des sciences mathématiques. Nous devons surtout attirer l'attention sur l'introduction en Géométrie infinitésimale d'un élément nouveau, qui semble appelé à jouer un rôle important dans la Géométrie des lignes tracées sur les surfaces, si l'on en juge du moins par l'heureux parti que l'auteur en a tiré pour la solution de plusieurs problèmes difficiles :

Que l'on imagine en chaque point d'une courbe gauche un segment normal dont la longueur et la direction soient fixées chaque fois par la position du point pris sur la courbe, puis que l'on projette sur une corde infiniment petite les segments normaux relatifs à ses extrémités; la somme algébrique ω de ces projections est l'élément dont nous voulons parler.

C'est un infiniment petit d'ordre impair, en général du troisième ordre; sinon il est du cinquième ou du septième; enfin, il ne peut être supérieur au septième ordre sans être absolument nul, et alors la courbe peut être placée sur une surface du second ordre. Ce beau théorème permet à l'auteur de définir directement et indépendamment de toute surface du second ordre les lignes qui peuvent être placées sur une telle surface, par exemple les cubiques et les biquadratiques gauches, et ce qui est plus remarquable encore, les lignes géodésiques. Ces lignes sont caractérisées par la propriété suivante : *Si, en deux points* M *et* M' *d'une géodésique tracée sur une surface du second ordre, on prend sur les normales principales des longueurs* MN *et* M'N' *proportionnelles aux racines cubiques des rayons de courbure correspondants, les projections de ces segments sur la corde* MM' *sont égales*. De là résultent deux équations différentielles qui lient l'arc, la courbure et la torsion; Laguerre écrit explicitement l'une d'elles, qui offre cette particularité remarquable, de pouvoir être intégrée sans qu'on établisse aucune relation entre la torsion et la courbure, en sorte que le carré de la torsion s'exprime algébriquement en fonction de la courbure et de ses deux premières dérivées.

Il convient en outre de signaler, sur les lignes géodésiques des surfaces du second ordre, une curieuse extension d'un théorème de Maclaurin relatif à l'ellipse. Si l'on nomme *axe de courbure*, en un point d'une telle géodésique, la droite qui a respectivement pour projections sur la tangente, la binormale et la normale principale, les quantités

$$\frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{r}, \quad -\frac{1}{3\rho}\frac{d\rho}{ds},$$

ρ et r désignant les rayons de courbure et de torsion au point considéré, Laguerre montre que :

1° *L'axe de courbure en un point* M *est perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la tangente en ce point ;*

2° *Si le point* M *se déplace sur la géodésique, tandis qu'un autre point* M′ *décrit une autre géodésique de la même surface, le rapport de la projection de l'axe de courbure en* M *sur la tangente en* M′, *à la projection de l'axe de courbure en* M′ *sur la tangente en* M, *reste constant; il est d'ailleurs égal à l'unité, si les deux lignes géodésiques touchent une même ligne de courbure.*

De là résulte une construction facile de l'axe de courbure en un point quelconque d'une ligne géodésique d'une surface du second ordre et, par suite, le moyen d'obtenir les valeurs en ce point des quantités r, ρ et $\frac{d\rho}{ds}$.

Mentionnons encore, au sujet des surfaces du second ordre, la solution graphique que Laguerre a donnée pour la détermination, en un point quelconque M, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux. *La normale en* M *rencontre les plans principaux de la surface en trois points; les droites* (D), *menées par ces points perpendiculairement aux plans principaux correspondants, déterminent un hyperboloïde. On peut construire deux génératrices de cet hyperboloïde appartenant au système* (D) *et perpendiculaires au diamètre passant par* M; *ces génératrices rencontrent la normale en* M *aux deux centres de courbure principaux relatifs à ce point, et les plans, menés par le diamètre perpendiculairement à ces deux généra-*

trices, coupent le plan tangent en M suivant les axes de l'indicatrice.

Nous devons enfin citer, avant de clore ce paragraphe :

1° Une Note sur la détermination des lignes géodésiques des surfaces dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2}{v} + \frac{dv^2}{u};$$

ces lignes sont déterminées par la relation

$$\frac{\cos^2 i}{\sqrt{v^3}} + \frac{\sin^2 i}{\sqrt{u^3}} = \text{const.},$$

i désignant l'inclinaison de la géodésique sur la courbe $v = \text{const.}$

2° Une exposition simple et lumineuse des formules fondamentales de la théorie des surfaces, telles qu'elles résultent des travaux de MM. O. Bonnet et Codazzi. Laguerre a déduit de ces formules certaines propriétés des systèmes de droites normales à une surface, qui méritent d'être remarquées :

Si des rayons émanant d'une surface S sont normaux à une même surface et si chacun d'eux fait un angle constant avec la surface S, la projection de ce système de rayons sur S est un système de lignes géodésiques de cette surface.

Étant donnés un système de lignes géodésiques tracées sur une surface et leurs trajectoires orthogonales, si par chaque point M de l'une de ces lignes on mène une droite située dans le plan de la tangente à cette ligne en M et de la normale à la surface, l'angle de cette droite avec le plan tangent étant d'ailleurs constant le long d'une trajectoire orthogonale (mais

pouvant varier quand on passe d'une trajectoire à l'autre), toutes ces droites sont normales à une même surface.

VI.

Tout théorème de Géométrie concernant des segments ou des angles comporte l'emploi des signes; mais ces théorèmes se distribuent en deux genres bien distincts.

Dans les uns, le sens positif que l'on doit attribuer à chacune des droites de la figure est arbitraire, et les énoncés, s'ils sont corrects, doivent se vérifier de quelque manière qu'on fasse cette attribution.

Dans les autres, le sens positif n'est arbitraire que pour certaines droites de la figure; et le sens positif des autres droites est déterminé par le théorème lui-même dont il est un élément essentiel. Ce sont les propositions de ce dernier genre qui constituent ce que Laguerre appelait la *Géométrie de direction*.

Laguerre donne le nom de *semi-droite* à une droite décrite dans un sens donné; une droite, pouvant être parcourue en deux sens différents, détermine donc deux *semi-droites opposées*. De même, un cercle décrit dans un sens indiqué reçoit le nom de *cycle,* et un même cercle détermine deux *cycles opposés*. En outre, une semi-droite et un cycle sont dits *tangents,* si la droite et le cercle correspondants se touchent, et si, de plus, sur l'élément commun, le sens est le même pour la droite et pour le cercle; si les sens sont inverses, on dit que la semi-droite est une tangente apparente du cycle.

Il résulte immédiatement de là qu'*on ne peut mener à un cycle donné qu'une tangente parallèle à une semi-droite donnée* et que *deux cycles donnés n'ont que deux tangentes communes et,* par suite, *qu'un seul*

centre de similitude. D'ailleurs, les trois centres de similitude de trois cycles considérés deux à deux sont sur une même droite qui est l'*axe de similitude* de ces trois cycles.

On nomme *distance tangentielle de deux cycles* la distance comprise, sur l'une des deux tangentes communes, entre les deux points de contact; elle n'est déterminée qu'en valeur absolue.

Le rayon d'un cycle sera considéré comme positif si le cycle est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre et comme négatif dans le cas contraire. Par suite, T étant la distance tangentielle de deux cycles, R et R′ leurs rayons et D la distance des centres, on a la relation

$$T^2 = D^2 - (R - R')^2,$$

qui se réduit à

$$T^2 = -4R^2$$

pour deux cycles opposés.

Le cycle qui a pour centre un point donné et qui touche une semi-droite donnée est bien déterminé; la distance du point à la semi-droite est le rayon du cercle; elle est donc déterminée en grandeur et en signe.

Un point doit être considéré comme un cycle infiniment petit et toutes les semi-droites passant par ce point comme des tangentes à ce cycle.

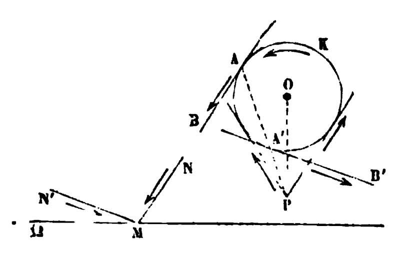
Étant données deux semi-droites, le lieu des centres des cycles qui leur sont tangents est une droite qu'on nommera la *bissectrice des deux semi-droites*. Par suite, le cycle astreint à toucher trois semi-droites données est unique, et son centre est à la rencontre des trois bissectrices des semi-droites prises deux à deux.

Il importe d'observer que les cycles qui touchent deux semi-droites opposées sont les divers points de la droite qu'elles déterminent. On le voit en supposant que, le

point d'intersection des deux semi-droites restant fixe, l'angle de ces semi-droites décroisse indéfiniment de façon que les deux semi-droites viennent se confondre avec leurs bissectrices; à la limite, les cycles inscrits se réduisent à des points, tandis que les deux semi-droites deviennent des semi-droites opposées.

Ces définitions étant établies, voici en quoi consiste la *méthode de transformation par semi-droites réciproques* qui constitue, sans contredit, l'une des plus ingénieuses créations de Laguerre.

Considérons une droite fixe Ω et un cycle K situés dans un même plan; soit P un point choisi arbitrairement sur la perpendiculaire abaissée du centre O du cycle sur la droite Ω; à chaque semi-droite MN du



plan, on peut faire correspondre une autre semi-droite de la façon suivante. Menons au cycle K la tangente AB parallèle à MN, joignons le point de contact A au point P; puis, au point A' où la droite AP coupe le cycle, menons la tangente A'B'; la semi-droite MN' menée parallèlement à A'B' par le point M où MN rencontre Ω sera la semi-droite correspondant à MN. Il est évident, d'après les constructions indiquées, que MN correspond réciproquement à MN'; on dit, d'après cela, que ces semi-droites sont *réciproques*.

On démontre aisément que *deux couples quelconques de semi-droites réciproques sont tangentes à un même*

cycle. La transformation se trouve caractérisée par cette propriété et par celle qui est contenue dans la définition même et qui consiste en ce que *deux semi-droites réciproques se croisent sur l'axe* Ω *de transformation*.

Il est clair que la transformation est définie quand on se donne l'axe Ω de transformation et deux semi-droites réciproques D et D'; pour obtenir la semi-droite Δ' réciproque d'une semi-droite quelconque Δ, il suffira de construire le cycle tangent à D, D' et Δ; la seconde tangente menée au cycle par le point M où Δ coupe l'axe Ω sera la semi-droite demandée Δ'.

Si l'on considère une courbe C comme l'enveloppe d'une semi-droite mobile Δ, la réciproque Δ' de Δ enveloppera une courbe C' qu'on nomme la *transformée* de la courbe C.

On démontre :

1° Que des semi-droites parallèles ont pour réciproques des semi-droites parallèles et qu'il y a deux séries de semi-droites parallèles qui se transforment en elles-mêmes;

2° Que, si une semi-droite touche deux courbes en deux points P et Q et si la semi-droite réciproque Δ' touche la transformée aux points P' et Q', les deux longueurs PQ et P'Q' sont égales.

3° Qu'un cycle K a pour transformé un cycle K'; l'axe radical de K et K' est l'axe de transformation; leurs tangentes communes sont parallèles à deux directions fixes (directions des semi-droites qui se transforment en elles-mêmes); la distance tangentielle de deux cycles est d'ailleurs égale à la distance tangentielle des deux cycles correspondants.

Désignons par R et R' les rayons des deux cycles et par D et D' les distances de leurs centres à l'axe Ω; R et R' sont donnés en grandeur et en signe, et il en est de

même de D et D', l'axe de transformation étant ici considéré comme une semi-droite dont on fixe le sens arbitrairement. Les rapports

$$\frac{D - D'}{R - R'}, \quad \frac{D + D'}{R + R'}$$

ont une même valeur constante qu'on nomme *module de la transformation*. Une transformation étant définie par son axe et son module, il existe une infinité de cycles qui se transforment en simples points; leur propriété caractéristique consiste dans la proportionnalité de leur rayon R à la distance D de leur centre à l'axe. On peut transformer en trois points trois cycles qui ne sont pas rencontrés par leur axe de similitude.

Tels sont les principes fort simples qui servent de fondement à la transformation par semi-droites réciproques.

Cette transformation peut servir, comme la transformation par rayons vecteurs réciproques, soit à simplifier la solution de certains problèmes, soit à généraliser certaines propriétés géométriques.

Si l'on propose, par exemple, de construire un *cycle tangent à trois cycles donnés*, on transformera ces cycles en trois points en prenant pour axe de transformation l'axe de similitude. Le cercle passant par ces points déterminera deux cycles opposés dont les réciproques sont les solutions du problème. D'ailleurs, comme deux cycles opposés rencontrent l'axe de transformation aux mêmes points, il en est de même de leurs réciproques, d'où l'on voit que la question proposée a deux solutions.

Le problème de mener un *cercle tangent à trois cercles donnés* se ramène immédiatement au précédent en attribuant un sens à chaque cercle de manière à le

transformer en cycle; cette attribution pouvant se faire de quatre manières différentes, on voit qu'il y a huit solutions.

Observons encore qu'on peut souvent avec avantage employer simultanément la transformation par semi-droites réciproques et la transformation par rayons vecteurs réciproques. Par cette double transformation, on peut transformer cinq cycles en deux semi-droites et trois points.

C'est dans la géométrie de la sphère que Laguerre a puisé l'idée de sa théorie des cycles; voici comment :

Lorsqu'un point M se déplace sur une sphère, le grand cercle dont ce point est le pôle enveloppe une courbe sphérique C′ corrélative de la courbe C décrite par le point M. Mais, si à un pôle M répond un grand cercle polaire unique, à un grand cercle correspondent deux pôles, en sorte que la théorie des courbes sphériques ainsi présentée offre quelque chose de défectueux. C'est pour faire disparaitre cette imperfection que Laguerre a imaginé de faire correspondre à un point M, non plus le grand cercle polaire, mais ce cercle parcouru dans un sens déterminé pour un spectateur placé sur la sphère et ayant ses pieds en M; en appelant *grand cycle* le cercle ainsi défini de position et de direction, on voit qu'à un point de la sphère répond un grand cycle polaire bien déterminé, et, réciproquement, qu'à un grand cycle correspond un pôle unique. De cette manière, la corrélative d'une courbe algébrique décrite par un point mobile sur la sphère est l'enveloppe de grands cycles et, par suite, une *courbe de direction*, c'est-à-dire une courbe telle qu'en chaque point sa tangente sphérique (arc de grand cercle) ait non seulement sa position, mais encore sa direction déterminées. Ces notions s'imposent évidemment quand on veut approfondir la géo-

métrie de la sphère. Si maintenant on suppose que, le rayon de la sphère croissant au delà de toute limite, la sphère dégénère en un plan, les grands cycles deviendront des semi-droites, et l'on voit même ainsi comment Laguerre a été conduit à considérer les courbes planes de la quatrième classe, auxquelles il a donné le nom d'*hypercycles*. Ces courbes ne pouvaient sans doute lui échapper, puisqu'elles sont les transformées par semi-droites réciproques de la parabole et qu'il était naturel d'appliquer le mode de transformation à cette ligne, la plus simple après le cercle. Mais, par le fait, c'est en étudiant les courbes de direction corrélatives des cassiniennes sphériques dont nous avons parlé au § III, puis en faisant dégénérer la sphère en un plan, que Laguerre a obtenu les premières propriétés des hypercycles.

Nous ne voudrions pas être trop longs, mais quelques indications sont encore nécessaires pour montrer l'extension que Laguerre a su donner à cette théorie.

Le cycle et l'hypercycle sont des courbes de direction, mais il n'en est pas ainsi d'une courbe algébrique quelconque. Pour qu'on puisse transformer une courbe algébrique C de classe n en une courbe de direction C_0, en la supposant décrite dans un certain sens, il faut que, parmi les $2n$ tangentes communes à la courbe C et à un cycle quelconque K, il y en ait seulement n qui soient des tangentes effectives à C_0; les n autres étant des tangentes apparentes. L'équation qui détermine les tangentes communes à K et à C doit donc, par l'extraction d'une racine carrée, se ramener à la résolution de deux équations de degré n, et comme, en coordonnées rectangulaires, l'équation tangentielle d'un cercle quelconque est

$$u^2+v^2=(\alpha u+\beta v+\gamma)^2,$$

il en résulte que *l'équation tangentielle la plus générale d'une courbe de direction est de la forme*

$$F^2(u, v) - (u^2 + v^2)\Phi^2(u, v) = 0,$$

F *et* Φ *désignant des fonctions rationnelles de* u *et de* v. Dans tout autre cas, et tel est celui d'une conique quelconque différente du cercle, pour transformer une courbe algébrique C en une courbe de direction, il faut la considérer comme double, c'est-à-dire comme résultant de la superposition de deux courbes opposées qui sont l'enveloppe d'un cycle de rayon infiniment petit dont le centre décrit la ligne C.

Les cycles, qui, ayant leurs centres sur une courbe algébrique, touchent une même semi-droite, enveloppent évidemment une courbe de direction qui est une anticaustique de la ligne primitive, les rayons incidents étant perpendiculaires à la semi-droite considérée. Ainsi toute anticaustique d'une courbe algébrique est une courbe de direction, et, réciproquement, une courbe de direction quelconque est une anticaustique d'une infinité de lignes algébriques qu'on peut déterminer.

Les courbes parallèles à une courbe de direction sont également des courbes de direction, et il en est de même de l'enveloppe de leurs normales.

Outre de nombreuses propriétés des systèmes de cycles et les conséquences intéressantes qui en résultent relativement aux coniques, Laguerre a donné une théorie complète des hypercycles et en particulier de l'hypercycle cubique. Tandis qu'un hypercycle quelconque peut être défini comme une courbe de la quatrième classe et du sixième ordre, passant par les ombilics du plan et ayant trois tangentes doubles dont l'une est la droite de l'infini, ou encore comme une anticaustique par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant

parallèles, l'hypercycle cubique peut être défini comme une courbe de troisième classe, passant par les ombilics, touchant la droite de l'infini et ayant une tangente double apparente, ou encore comme une anticaustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles; c'est la courbe de direction la plus générale de la troisième classe, et, par suite, la première à étudier après les cycles, qui constituent à eux seuls les courbes de direction de la seconde classe. Laguerre a résolu, relativement à l'hypercycle cubique, les divers problèmes qui n'exigent que l'emploi de la règle et du compas et a indiqué un grand nombre de propriétés, parmi lesquelles il faut surtout signaler une relation remarquable entre six tangentes quelconques.

Toutes les notions qui précèdent peuvent d'ailleurs être étendues à l'espace, notamment la méthode de transformation qui est alors une *transformation par semi-plans réciproques* et d'où Laguerre a déduit, entre autres applications, les beaux théorèmes de M. Darboux sur les anticaustiques des surfaces du second ordre.

VII.

Passons maintenant aux travaux d'Analyse pure.

Les premières recherches analytiques de Laguerre ont pour objet des méthodes d'approximation pour des fonctions spéciales. Elles trouvent leur point de départ dans certains Mémoires de Lagrange ou de Jacobi et dans divers travaux de M. Hermite, pour lequel Laguerre professait une si légitime admiration.

Lagrange s'était occupé de la réduction en fraction continue d'une fonction définie par une équation différentielle du premier ordre à coefficients rationnels. Laguerre, considérant le cas particulièrement important

où l'équation est linéaire, a résolu la question d'une manière bien plus complète en signalant et utilisant les liens étroits qui rattachent cette recherche à la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre admettant pour intégrales des polynômes algébriques.
Soit une fonction z développable suivant les puissances décroissantes de x et satisfaisant à l'équation différentielle

$$Wz' = 2Vz + U,$$

où U, V, W désignent des polynômes entiers. La réduite de rang $n+1$ étant

$$\frac{\varphi_n}{f_n},$$

Laguerre montre d'abord que f_n satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre dont

$$e^{-\int \frac{V}{W} dx}(\varphi_n - f_n z)$$

est une deuxième solution; il ramène ainsi la question à former cette équation du second ordre et à déterminer les polynômes du premier degré Q_n qui figurent dans la formule de récurrence

$$f_{n+1} - Q_n f_n + f_{n-1} = 0.$$

A cet effet, il introduit des polynômes auxiliaires, dont les uns Θ_n sont du degré de l'expression

$$\frac{V}{x} + \frac{W}{x^2},$$

et les autres Ω_n d'un degré supérieur d'une unité. Ces polynômes satisfont à quatre identités, d'où l'on déduit immédiatement et sans calcul les polynômes Q_n et l'équation différentielle, dans le cas où Θ_n est de degré zéro. Lorsque Θ_n est d'un degré plus élevé, les identités

dont nous venons de parler permettent de déduire Θ_{n-1} et Ω_{n-1} de Θ_n et Ω_n, et par suite, de calculer par récurrence les polynômes Q_n, ainsi que les numérateurs et les dénominateurs des réduites.

Laguerre a appliqué cette théorie à diverses fonctions, et notamment aux fonctions

$$e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}}, \quad \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^m, \quad \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

On sait que Laplace a donné, dans la *Mécanique céleste,* le développement en fraction continue de l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx;$$

sa démonstration, reposant sur l'emploi d'une série divergente, est absolument inadmissible, bien que les résultats soient exacts, comme l'a fait voir Jacobi en démontrant ces résultats directement. Laguerre fait observer que la méthode qu'il a appliquée à l'intégrale

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

subsiste entièrement pour l'intégrale de Laplace; ajoutons que sa méthode a l'avantage de montrer avec netteté comment, en partant d'une série divergente, on peut arriver néanmoins à une fraction continue donnant la valeur de la fonction à représenter.

Le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme avait déjà fixé l'attention de Jacobi, mais seulement au point de vue de la détermination des coefficients. Laguerre a montré comment on pouvait rattacher cette théorie difficile à celle beaucoup plus aisée de l'approximation par les fractions rationnelles. Il a traité, en particulier, deux cas fort

intéressants : celui de e^z suivant les puissances d'un polynôme $F(z)$, et celui de $f(x+tz)$, f désignant une fonction quelconque, suivant les puissances de $x(x-1)$. Dans le premier cas, il est conduit à une équation différentielle linéaire d'ordre n qu'il intègre complètement, en employant l'équation adjointe de Lagrange. L'étude du second le conduit à une élégante formule d'interpolation, trouvée antérieurement et de tout autre façon par M. Hermite.

Voici encore, dans le même ordre d'idées, un résultat très important. Après avoir démontré géométriquement ce théorème de M. Hermite : « *Si, pour toutes les racines de l'équation*

$$F(x)+i\Phi(x)=0,$$

le coefficient de i a le même signe, l'équation

$$pF(x)+q\Phi(x)=0,$$

où p et q désignent deux nombres réels arbitraires, a toutes ses racines réelles », Laguerre établit la proposition suivante :

$F(x)$ *désignant un polynôme de degré $n\mu$, tellement choisi que les fractions*

$$\frac{\Phi_1(x)}{F(x)},\quad \frac{\Phi_2(x)}{F(x)},\quad \ldots,\quad \frac{\Phi_n(x)}{F(x)}$$

approchent le plus des transcendantes

$$e^{a_1x},\quad e^{a_2a},\quad \ldots,\quad e^{a_nx},$$

le polynôme $F(x)$ est entièrement caractérisé par cette propriété que, dans le développement de $F(x)e^{ax}$ suivant les puissances croissantes de x, le coefficient de $x^{\mu(n-1)}$ est

$$z^\mu(z-a_1)^\mu(z-a_2)^\mu\ldots(z-a_n)^\mu.$$

L'expression de $F(x)$ résulte de là fort aisément.

Citons enfin, pour ne rien omettre d'essentiel :

1° Une étude sur le développement de l'intégrale

$$\int z^n e^{-\frac{1}{2}z^2+zx},$$

qui conduit aux polynômes U_n, rencontrés déjà par M. Hermite à propos des dérivées successives de $e^{\frac{x^2}{2}}$;

2° Une démonstration, par la théorie des fractions continues algébriques, du théorème fondamental de la théorie des fonctions symétriques des racines d'une équation, théorème qui, donné d'abord par Cauchy, avait été démontré par Borchardt au moyen de la théorie des fonctions ultra-elliptiques.

3° Une Note sur la partition des nombres, qui se rattache à la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)\dots(1-z^l)},$$

a, b, ..., l étant les coefficients entiers de l'équation

$$ax+by+\dots+lu=N,$$

dont il s'agit de trouver *approximativement* le nombre T(N) des solutions entières et positives. En appliquant sa théorie générale aux cas simples

$$ax+by=N \qquad \text{et} \qquad ax+by+cz=N,$$

Laguerre obtient les formules

$$T(N)=\frac{N}{ab},$$

$$T(N)=\frac{N}{2abc}(N+a+b+c),$$

dont la première est bien connue et attribuée à Paoli.

VIII.

Les travaux de Laguerre sur la résolution des équations numériques forment par leur ensemble la partie la plus considérable de son œuvre, et peut-être celle à laquelle il attachait le plus de prix. Il se proposait, avant que la mort vînt le surprendre, de coordonner ces recherches et de les réunir en un Volume qui en eût renfermé l'exposition complète. Ce Volume, dont seulement les premiers Chapitres ont été rédigés et publiés dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, eût été divisé en trois Sections ayant trait respectivement à la généralisation et aux applications du théorème de Descartes, aux méthodes d'approximation pour le calcul des racines, enfin à la recherche des racines imaginaires. C'est cet ordre même que nous allons suivre ici.

La première Partie est la plus complète, et Laguerre semble avoir dit son dernier mot sur ce sujet.

Le théorème de Descartes consiste dans la proposition suivante :

$F(x)$ *désignant un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de* x, *le nombre des racines positives de l'équation* $F(x) = 0$ *est au plus égal au nombre des variations du polynôme* $F(x)$.

Laguerre observe que, la proposition étant évidente lorsque les termes du polynôme ont tous le même signe, il suffit de prouver que le théorème, étant admis dans le cas où $F(x)$ compte $m - 1$ variations, subsiste lorsque $F(x)$ a une variation de plus. A cet effet, il applique le principe de Rolle à l'équation

$$x^{-a} F(x) = 0.$$

dans laquelle a est un nombre arbitraire et dont les racines positives sont d'ailleurs les mêmes que celles de

$$(1) \qquad F(x) = 0.$$

Il en conclut que le nombre des racines positives de cette équation (1) est au plus supérieur d'une unité à celui des racines positives de l'équation

$$(2) \qquad x\,F'(x) - a\,F(x) = 0.$$

Or on voit aisément, en mettant en évidence la composition des polynômes $F(x)$ et $F'(x)$, que le premier membre de l'équation (2) offre, comme $F(x)$, $m-1$ variations; l'équation (2) a donc au plus $m-1$ racines positives, et, par suite, l'équation proposée (1) en renferme un nombre au plus égal à m.

Nous avons indiqué cette démonstration, non seulement à cause de sa simplicité, mais surtout parce qu'on y trouve l'origine de l'extrême généralisation que Laguerre est parvenu à donner au théorème de Descartes. Rien dans cette démonstration, et c'est là le point décisif, ne suppose que $F(x)$ soit un polynôme entier; les exposants pourraient être fractionnaires ou incommensurables; $F(x)$ peut même être une série ordonnée suivant les puissances décroissantes ou croissantes de x. Le théorème de Descartes prend dès lors une extension considérable, et Laguerre l'énonce comme il suit :

W *étant une série ordonnée suivant les puissances entières, fractionnaires ou incommensurables de* x, *le nombre des valeurs positives de* x, *pour lesquelles la série* W *est convergente et a pour valeur zéro, est au plus égal au nombre des variations que présente la suite des divers termes de la série.*

De là découlent un grand nombre de règles simples et nouvelles pour certains types d'équations remarqua-

bles, telles que

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l}=0$$

et

$$\int_a^b e^{-zx}\Phi(z)dz=0,$$

$$\int_a^b \frac{\Phi(z)dz}{(z-x)^n}=0,$$

où $\Phi(z)$ désigne une fonction qui peut être discontinue. Nous citerons encore les deux théorèmes suivants :

F(x) *désignant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de* x *et ayant tous ses coefficients positifs ou nuls,* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *désignant, d'autre part, des quantités positives rangées par ordre décroissant de grandeur, le nombre des racines positives de l'équation*

$$A_1F(\alpha_1x)+A_2F(\alpha_2x)+\ldots+A_nF(\alpha_nx)=0,$$

c'est-à-dire le nombre des valeurs positives de x*, pour lesquelles le premier membre converge vers zéro, est au plus égal au nombre des variations de la suite*

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n.$$

Étant donnés un polynôme entier $f(x)$ *et un nombre positif quelconque* α*, on peut toujours déterminer un nombre entier* p*, tel que l'équation*

$$(1+\alpha x)^p f(x)=0$$

présente autant de variations que l'équation $f(x)=0$ *a de racines positives.*

Cette seconde proposition a été généralisée depuis par M. Poincaré.

Mais Laguerre ne s'est pas arrêté là. Il a étendu

d'abord la règle des signes de Descartes au cas où le premier membre de l'équation est exprimé linéairement au moyen des polynômes de Legendre, et plus généralement au moyen de polynômes entiers satisfaisant à certaines équations différentielles linéaires du second ordre; puis, poursuivant encore le cours de ses recherches, il a étudié les équations dont le premier membre est une fonction entière de x, en introduisant, d'après Weierstrass, la notion du genre d'une fonction. La plupart des propositions relatives aux équations dont le premier membre est un polynôme entier ne s'appliquent plus alors que sous de nombreuses réserves. Tel est, par exemple, le théorème des lacunes; après avoir cité des exemples où cette proposition est en défaut, Laguerre a montré que le théorème subsiste dans le cas où les éléments simples du premier membre de l'équation sont des fonctions du genre zéro ou du genre 1, ou des exponentielles de la forme e^{ax^2+bx+c}, a, b, c désignant des nombres réels quelconques dont le premier est essentiellement négatif. Dans ce même ordre d'idées, il a fait voir encore que :

Si la fonction entière du genre n, $F(x)$, ne s'annule que pour un nombre limité de valeurs imaginaires, toutes les dérivées de $F(x)$ sont du genre n.

Enfin, il a réussi à démontrer que la transcendante de Bessel est du genre zéro, proposition que Fourier avait trouvée jadis, mais par des raisonnements justement contestés par Poisson et Cauchy.

Passons maintenant à la deuxième Partie, c'est-à-dire aux questions relatives à l'approximation des racines des équations algébriques ou transcendantes.

La méthode de Newton pour déterminer une limite

supérieure des racines positives d'une équation

$$(1) \quad f(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

consiste à trouver une quantité a qui rende positives la fonction $f(x)$ et ses dérivées successives. Mais le calcul des valeurs numériques de la suite

$$(2) \qquad f(x), \quad f'(x), \quad \ldots, \quad f^{(m)}(x)$$

est pénible, d'autant plus que la connaissance des valeurs de plusieurs termes de cette suite ne facilite en rien le calcul des suivants. Laguerre montre qu'on peut atteindre le même but à l'aide des fonctions

$$(3) \quad \begin{cases} f_m(x) = A_0, \\ f_{m-1}(x) = A_0 x + A_1, \\ f_{m-2}(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_1(x) = A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}, \\ f\,(x) = A_0 x_m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m, \end{cases}$$

dont le calcul est beaucoup plus aisé, attendu que les valeurs de ces fonctions se présentent successivement d'elles-mêmes dans le calcul de la valeur que prend la dernière $f(x)$ pour une valeur donnée de x. Ainsi :

Tout nombre positif a, qui rend positifs les polynômes de la suite (3), *est une limite supérieure des racines de l'équation* (1).

Les mêmes observations critiques s'appliquent encore, et avec plus de force, au théorème de Budan qui indique comme limite supérieure du nombre des racines réelles comprises entre deux nombres a et b la différence entre les nombres de variations qu'offre la suite (2) pour $x = a$ et $x = b$. Laguerre résout le même problème, d'une manière bien moins pénible :

Si l'on désigne par a et b deux nombres positifs et par

$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-2} x^{m-2}$$

la partie entière du quotient du polynôme $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, le nombre des racines réelles de l'équation (1) *comprises entre a et b est au plus égal au nombre des variations des termes de la suite*

$$(4) \qquad \begin{cases} f(a), \\ f(b) - b(b-a)C_0, \\ f(b) - b^2(b-a)C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(b) - b^{m-1}(b-a)C_{m-2}, \\ f(b); \end{cases}$$

et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

Faisant ensuite l'application de ce théorème à la question suivante : *Déterminer deux limites entre lesquelles restent comprises les valeurs du polynôme $f(x)$ lorsque x reçoit toutes les valeurs situées entre deux nombres positifs a et b*, il trouve que ces limites sont le plus petit et le plus grand des termes de la suite (4).

Dès qu'on a une valeur suffisamment approchée d'une racine d'une équation, la méthode d'approximation de Newton et la méthode des parties proportionnelles fournissent l'une et l'autre des moyens commodes et rapides pour approcher indéfiniment de cette racine. La difficulté principale est d'obtenir cette valeur assez approchée pour servir de point de départ. Laguerre cherche à l'éviter en posant la question d'une autre façon : *Étant donné un nombre arbitraire x, déterminer, sans tâtonnement et par suite d'opérations régulières, des*

valeurs de plus en plus approchées de la racine immédiatement supérieure ou immédiatement inférieure à x. Il résout complètement ce problème pour les équations algébriques dont toutes les racines sont réelles, à l'aide de la proposition suivante :

En désignant par $f(x) = 0$ une équation de degré n dont toutes les racines sont réelles et par α une quantité arbitraire, les deux valeurs de x déterminées par l'équation

$$(5) \qquad \frac{1}{x-\alpha} = -\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} + \frac{\varepsilon}{nf(\alpha)}\sqrt{(n-1)\mathrm{H}(\alpha)}$$

sont respectivement comprises entre α et les deux racines de l'équation proposée qui avoisinent x.

Dans la formule (5), ε désigne l'unité prise avec le signe de $f(\alpha)$, et $\mathrm{H}(x)$ représente le hessien

$$\mathrm{H}(x) = f'^2(x) - nf(x)f''(x)$$

de $f(x)$; on sait d'ailleurs que ce hessien a une valeur toujours positive.

Ce théorème résout pleinement la question proposée : on tirera de la formule (5) une valeur convenable de $x-\alpha$; puis, en partant de la nouvelle valeur de x, ou, pour faciliter les substitutions, de toute autre valeur comprise entre x et α, on continuera les opérations qui permettront ainsi d'approcher indéfiniment de la racine.

Cette méthode offre sur celle de Newton l'avantage de n'être jamais en défaut, quelle que soit la valeur de départ α, et l'on démontre sans peine que, dans le cas où la méthode de Newton peut être employée avec sûreté, la formule (5) donne toujours une approximation plus grande.

Signalons encore un théorème très important sur la séparation des racines des équations dont toutes les racines sont réelles :

Si l'on désigne par α *une quantité réelle arbitraire, les nombres* ξ *et* ξ', *qui satisfont à la relation*

$$(\xi-\alpha)(\xi'-\alpha)[f'^2(\alpha)-f(\alpha)f''(\alpha)] \\ +(\xi+\xi'-2\alpha)f(\alpha)f'(\alpha)+nf(\alpha)^2=0,$$

et dont l'un est arbitraire, séparent les racines de l'équation, de degré n, $f(x)=0$.

Nous appellerons, à ce sujet, l'attention sur le principe élégant qui sert de base à la démonstration de ce théorème et de plusieurs autres propositions du même genre : il consiste à mettre la relation qui exprime la propriété à démontrer sous une forme telle qu'elle ne renferme que des covariants de la forme binaire $f(x, y)=0$; la propriété ainsi présentée se trouve alors projective et il suffit, pour l'établir généralement, de la démontrer pour deux valeurs particulières des deux variables indépendantes.

Le cas des équations dont toutes les racines sont réelles est très important, les équations de ce genre s'offrant d'une manière fréquente en Analyse. La place nous manque pour suivre Laguerre dans les diverses applications de ses méthodes aux équations qui déterminent $\cos\frac{a}{n}$, $\operatorname{tang}\frac{a}{n}$, ..., ainsi qu'à celles qu'on obtient en égalant à zéro les polynômes X_n de Legendre, les polynômes U_n de M. Hermite, et plus généralement les polynômes $\Phi(x)$ qui satisfont à une équation différentielle linéaire du second ordre. Dans le cas où l'équation $\Phi(x)=0$ a toutes ses racines réelles, Laguerre forme une expression simple Ω qui doit avoir une valeur positive ou nulle toutes les fois qu'on y met pour x une

---

JAMIN (J.), Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, et **BOUTY**, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours de Physique de l'École Polytechnique**. 3ᵉ édition, augmentée et entièrement refondue. 4 forts vol. in-8 de 3600 pages, avec 1450 figures dans le texte et 13 planches sur acier, dont 2 en couleur; 1879-1887. (*Autorisé par décision ministérielle.*) .... 70 fr.

On vend séparément :

TOME I. — 15 fr.

(*) 1ᵉʳ FASCICULE. — *Instruments de mesure; Hydrostatique*, avec 158 fig. dans le texte et 1 planche .... 5 fr.

2ᵉ FASCICULE. — *Actions moléculaires*; avec 91 fig. dans le texte. 4 fr.

3ᵉ FASCICULE. — *Gravitation universelle; Électricité statique*, avec 110 figures dans le texte et 1 planche .... 6 fr.

TOME II. — CHALEUR. — 15 fr.

(*) 1ᵉʳ FASCICULE. — *Thermométrie; Dilatations*; avec 98 figures dans le texte .... 5 fr.

(*) 2ᵉ FASCICULE. — *Calorimétrie*; avec 48 figures dans le texte et 2 planches .... 5 fr.

3ᵉ FASCICULE. — *Théorie mécanique de la Chaleur; Propagation de la Chaleur*; avec 47 figures dans le texte .... 5 fr.

TOME III. — ACOUSTIQUE; OPTIQUE. — 20 fr.

1ᵉʳ FASCICULE. — *Acoustique*; avec 123 figures dans le texte .... 4 fr.

(*) 2ᵉ FASCICULE. — *Optique géométrique*, avec 139 figures dans le texte et 3 planches .... 4 fr.

3ᵉ FASCICULE. — *Étude des radiations lumineuses, chimiques et calorifiques; Optique physique*; avec 226 figures dans le texte et 5 planches, dont 2 planches de spectres en couleur .... 12 fr.

TOME IV. — ÉLECTRICITÉ DYNAMIQUE; MAGNÉTISME. — 20 fr.

1ᵉʳ FASCICULE. — *La pile; Phénomènes électrothermiques et électrochimiques*; avec 154 figures dans le texte .... 6 fr.

2ᵉ FASCICULE. — *Les aimants; Magnétisme; Électromagnétisme; Induction*; avec 230 figures dans le texte et 1 planche .... 9 fr.

3ᵉ FASCICULE. — *Applications de l'électricité; Complément sur les principales découvertes faites pendant la publication de l'Ouvrage. Table générale par noms d'auteurs*, et *Table générale des matières par ordre alphabétique*; avec 55 figures dans le texte et 1 planche .... 5 fr.

(*) Les matières du programme d'admission à l'École Polytechnique sont comprises dans les parties suivantes de l'Ouvrage :
Tome I, 1ᵉʳ fascicule; Tome II, 1ᵉʳ et 2ᵉ fascicule; Tome III, 2ᵉ fascicule.

KŒHLER (J.), ancien Répétiteur à l'École Polytechnique, ancien Directeur des Études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. — **Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure**. *Questions et solutions*. A l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale et à l'Agrégation. 2 volumes in-8, avec figures; 1886.

On vend séparément :

Iʳᵉ Partie : *Géométrie plane* .... 9 fr.
IIᵉ Partie : *Géométrie dans l'espace* .... (*Sous presse.*)

TABLE DES MATIÈRES.

Mars 1887.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

ET

CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME SÉRIE.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

AVRIL 1887.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, rue Hallé, 32 et 34,
ou à M. BRISSE, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine).
(AFFRANCHIR.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

Ce Recueil paraît chaque mois.

ANNUAIRE POUR L'AN 1887, publié par le **Bureau des Longitudes**, contenant la Notice suivante : *La Photographie astronomique à l'Observatoire de Paris et la Carte du Ciel;* par l'amiral *Mouchez*, Membre de l'Institut, Directeur de l'Observatoire de Paris. In-18 de 892 pages, avec figures dans le texte, deux nouvelles Cartes magnétiques et trois Planches hors texte, dont deux en héliogravure.

Broché........... 1 fr. 50 c.
Cartonné......... 2 fr.

*Pour recevoir l'*Annuaire *franco par la poste, dans tous les pays faisant partie de l'Union postale, ajouter* 35 *c.*

JAMIN (**J.**), Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, et **BOUTY**, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours de Physique à l'usage de la classe de Mathématiques spéciales.** 2e édition. Deux volumes in-8; 1886... **20 fr.**

On vend séparément :

Tome I : *Instruments de mesure. Hydrostatique. — Optique géométrique. — Notions sur les phénomènes capillaires.* In-8, avec 312 figures dans le texte et 4 planches........................... **10 fr.**

Tome II : *Thermométrie. Dilatations. — Calorimétrie.* In-8, avec 146 figures dans le texte et 2 planches...................... **10 fr.**

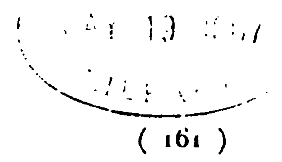
Cette nouvelle édition, destinée aux élèves de la classe de Mathématiques spéciales, correspond exactement au programme actuel d'admission à l'École Polytechnique. Elle comprend, avec un Chapitre sur les phénomènes capillaires, quatre petits Traités distincts, extraits du grand Ouvrage de MM. Jamin et Bouty, mais rédigés spécialement, et dès l'origine, en vue des élèves des lycées.

Ceux d'entre eux qui poursuivront l'étude de la Physique, dans les grandes Écoles de l'État ou dans les Facultés, pourront se procurer le reste du grand Ouvrage. Ils y trouveront traitées, avec tous les développements que comporte l'état actuel de la Science, les matières correspondant à l'enseignement supérieur de la Physique.

JAŸS (**L.**), Professeur de Physique, ancien Météorologiste adjoint de l'Observatoire de Lyon, et ancien chef des travaux de Physique à la Faculté de Médecine de Lyon. — **Problèmes de Physique et de Chimie**, choisis parmi les sujets de compositions proposés dans les concours et par les diverses Facultés dans ces dernières années. In-8, avec figures dans le texte; 1886.. **6 fr.**

LEMSTROM, Professeur de Physique à l'Université d'Helsingfors. — **L'aurore boréale.** *Étude générale des phénomènes produits par les courants électriques de l'atmosphère.* Grand in-8, avec quatorze planches, dont cinq en chromolithographie, et figures dans le texte; 1886.. **6 fr. 50 c.**

LEROY. — **Traité de Stéréotomie**, comprenant les **Applications de la Géométrie descriptive à la Théorie des ombres, la Perspective linéaire, la Gnomonique, la Coupe des pierres et la Charpente.** Revu et annoté par *E. Martelet*, ancien Élève de l'École Polytechnique, Professeur de Géométrie descriptive à l'École centrale des Arts et Manufactures. 11e édition, augmentée d'un Supplément : **Théorie et construction de l'appareil hélicoïdal des arches biaises**, par J. DE LA GOURNERIE, rédigées par *Ernest Lebon*, Agrégé de l'Université, Professeur au lycée Charlemagne. In-4, avec Atlas de 76 planches in-folio; 1887... **26 fr.**



racine de l'équation. Si donc Ω n'est pas positive pour toutes les valeurs de x, on obtiendra par là même des limites comprenant les racines de l'équation; en particulier, si Ω est toujours négative, on pourra affirmer l'existence de racines imaginaires.

La troisième Partie concerne la recherche des racines imaginaires. Elle renferme une notion absolument nouvelle, celle des *points dérivés,* dons nous allons indiquer en quelques mots le sens et l'utilité.

Soit l'équation $f(x,y) = 0$, de degré n, où y est égal à l'unité et a été introduit pour rendre le polynôme f homogène; si l'on représente, à la manière de Cauchy, une quantité imaginaire par un point du plan et si M est le point représentatif de x, Laguerre nomme *point dérivé de* M le point m qui représente la quantité ξ définie par la relation

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

d'où il résulte que, si M est le point représentatif d'une valeur x approchée d'une racine et si M' désigne le point représentatif de la valeur approchée que donne la méthode de Newton, le point dérivé m s'obtiendra en portant à partir de M, dans la direction MM', une longueur égale à n.MM'.

Cette considération donne lieu à plusieurs propositions nouvelles dont voici les deux plus simples :

Tout cercle passant par un point quelconque du plan et par le point dérivé renferme au moins une racine de l'équation; et il y a aussi au moins une racine en dehors du cercle.

Pour qu'une équation ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que chaque point du plan et son

point dérivé soient situés de part et d'autre de l'axe des x.

Du premier théorème résulte le moyen de calculer les racines par approximations successives. Supposons, en effet, qu'on ait déterminé un contour fermé, un cercle par exemple, renfermant dans son intérieur une seule racine. Si l'on a déterminé une valeur suffisamment approchée de la racine, on pourra trouver un point M intérieur au cercle et tel que ce cercle renferme aussi le point dérivé m. Par les points M et m on mènera alors deux cercles C et C' tangents au cercle donné, et il est clair que la racine cherchée devra se trouver dans la lunule commune à C et à C'; en continuant les mêmes constructions, qui peuvent d'ailleurs être remplacées par des formules analytiques, on parviendra à déterminer la racine avec telle approximation qu'on voudra.

Laguerre a appliqué les considérations qui précèdent à la détermination des racines imaginaires des équations à coefficients réels qui n'ont que deux racines imaginaires.

Cette troisième Partie, on le voit, est la moins complète, sinon la moins remarquable des trois. Nul doute que, si le temps ne lui eût fait défaut, Laguerre n'eût heureusement complété ses belles tentatives dans un genre de recherches si hérissé de difficultés.

IX.

Les travaux de Laguerre sur les équations différentielles comprennent : d'abord un Mémoire sur le facteur intégrant des équations du premier ordre, et deux autres applications intéressantes du principe du dernier multiplicateur de Jacobi; puis un Mémoire fondamental sur les équations linéaires d'ordre quelconque, enfin une exposition fort ingénieuse et très nette de la méthode de

Monge pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Le Mémoire relatif à la recherche du facteur d'intégrabilité complète d'importants résultats obtenus par Lagrange. Soit

$$dy - z\,dx = 0$$

l'équation du premier ordre à intégrer, dans laquelle z est déterminé par l'équation $V(x, y, z) = \alpha$, où α désigne une constante arbitraire. M étant un facteur propre à rendre $dy - z\,dx$ une différentielle exacte, on peut supposer que, dans son expression, on ait remplacé α par $V(x, y, z)$, en sorte que le multiplicateur M soit une fonction des trois variables indépendantes x, y, z; cette fonction satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles dont il suffira de trouver une solution particulière pour intégrer l'équation proposée. Inversement, étant donné un multiplicateur $M(x, y, z)$, on peut demander toutes les fonctions V jouissant de la propriété que, z étant déterminé par la relation $V(x, y, z) = \alpha$, l'équation $dy - z\,dx$ admette M comme facteur intégrant. En se fondant sur la théorie du dernier multiplicateur, Laguerre fait voir que, si l'on connaît une valeur particulière de V, on peut les déterminer toutes par une quadrature pouvant être réellement effectuée. De là résulte, en particulier, que si l'on sait intégrer une équation différentielle du premier ordre renfermant une constante arbitraire ou, ce qui est équivalent, une équation différentielle du second ordre, on saura par là même intégrer un type d'équations différentielles du premier ordre renfermant trois fonctions arbitraires. Lagrange avait déjà donné une proposition semblable, mais où il n'entrait qu'une fonction arbitraire.

Les deux autres applications du principe du dernier

multiplicateur ont trait : l'une à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x,y)}},$$

où F désigne une fonction quelconque et f un polynôme du second degré ; l'autre à l'équation

$$(2) \qquad y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 6\psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant un polynôme du second degré. Laguerre, en utilisant les propriétés des formes quadratiques, montre qu'on peut intégrer l'équation (1), dès que l'on connaît une solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{\varphi(x,y)}},$$

φ désignant un autre polynôme du second degré. Quant à l'équation (2), qui est évidemment satisfaite par tous les polynômes du troisième degré dont le hessien est $f(x)$, Laguerre donne l'expression de son intégrale générale à l'aide des fonctions elliptiques.

Arrivons aux équations linéaires d'ordre quelconque. Si, dans une telle équation d'ordre n, on conserve la variable indépendante x, en remplaçant la fonction inconnue y par zu, et si l'on dispose de z de manière à faire évanouir, dans la transformée, le second terme, c'est-à-dire le terme en $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$, les coefficients des termes qui suivent sont des fonctions que Laguerre qualifie de *semi-invariants;* ces fonctions jouissent en effet de la propriété d'invariance lorsque l'on conserve la variable indépendante en prenant une autre fonction pour inconnue. De l'étude de ces semi-invariants, Laguerre déduit, en particulier, que l'on peut toujours, dans une

équation différentielle linéaire d'ordre quelconque, faire disparaître le troisième et le quatrième terme par l'intégration d'une équation linéaire du second ordre et une quadrature. Il signale, en outre, pour l'équation linéaire du troisième ordre, un invariant tel que, lorsqu'il s'annule, il existe une relation homogène et du second degré entre trois solutions quelconques de l'équation différentielle proposée.

Nous ne saurions trop appeler l'attention sur ce travail dont M. O. Bonnet et M. Hermite ont parlé tour à tour à l'Académie des Sciences en termes si élogieux. Ce n'est que deux ans après avoir communiqué ses idées sur ce sujet à M. Bertrand que Laguerre, toujours peu empressé de mettre au jour ses recherches, les a publiées dans les *Comptes rendus.* Pendant qu'il parvenait ainsi à la conception si originale des invariants des équations différentielles, M. Halphen, en suivant un ordre d'idées différent, arrivait de son côté à la notion des invariants différentiels qu'il a développée avec tant d'éclat. Ces deux géomètres se partagent donc la gloire d'avoir, simultanément et indépendamment l'un de l'autre, ouvert une voie féconde déjà très brillamment parcourue, mais non encore entièrement explorée.

Dans son exposition si élégante et vraiment curieuse de la méthode de Monge pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, Laguerre commence par observer que le premier membre W de l'équation à intégrer

$$Hr + 2Ks + Lt - M + N(rt - s^2) = 0$$

peut être mis, d'une infinité de manières, sous la forme

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

a, b, c, d, α, β, γ, δ étant des quantités dont trois peuvent être choisies arbitrairement. Tous les systèmes de valeurs de ces quantités se distribuent en deux groupes correspondant aux deux signes du radical

$$\sqrt{K^2 - HL - MN}.$$

Représentons par F(A, B, C, D) l'expression

$$A\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + p\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + B\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + q\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) + C\frac{\partial\omega}{\partial p} + D\frac{\partial\omega}{\partial q},$$

et désignons par

$$(a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta), (a', b', c', d', \alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

deux systèmes de valeurs des indéterminées n'appartenant pas à un même groupe. Toute la méthode pourra être renfermée dans ce théorème unique :

u et v étant deux solutions communes au système d'équations

$$F(a, b, c, d) = 0,$$
$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,$$

et u' et v' deux solutions communes au système

$$F(a', b', c', d') = 0,$$
$$F(\alpha', \beta', \gamma', \delta') = 0,$$

si, des équations

$$u - f(v) = 0,$$
$$u' - \varphi(v') = 0,$$

où f et φ désignent des fonctions arbitraires, on tire p et q en fonction de x, y, z, ces valeurs, substituées dans

$$p\,dx + q\,dy,$$

rendront cette expression une différentielle exacte, et l'on aura la fonction inconnue z par la formule

$$z = \int (p\,dx + q\,dy).$$

Dans le cas où le radical dont nous avons parlé ci-dessus s'annule, un seul système de valeurs de a, b, c, d, α, β, γ, δ suffit.

Passons maintenant aux travaux sur les transcendantes elliptiques et abéliennes. Nous avons cité déjà la belle construction que Laguerre a donnée pour l'addition des fonctions ultra-elliptiques de première espèce. Nous devons signaler encore diverses recherches sur la transformation des fonctions elliptiques, entreprises surtout dans le but de généraliser des résultats trouvés par M. Hermite relativement à la transformation du troisième ordre.

Le problème de la transformation peut être posé dans les termes suivants :

$U(x, y)$ *étant une fonction homogène du quatrième degré* (y est ici introduit pour l'homogénéité et doit être supposé égal à 1) *et* H *étant son hessien, trouver une intégrale rationnelle* $z = \frac{X}{Y}$ *de l'équation*

$$\frac{dz}{\sqrt{U(z, 1)}} = \frac{dx}{\sqrt{\lambda U + \mu H}},$$

les nombres λ *et* μ *étant convenablement choisis.*

Dans le cas où le degré de la transformation est de la forme $4n \pm 1$, Laguerre ramène la détermination de X et Y à celle de deux polynômes homogènes en U et H, qui ne dépendent des valeurs particulières attribuées à U que par les valeurs des invariants S et T de ce polynôme U; cette détermination peut s'effectuer par les méthodes données par Jacobi.

Laguerre fait connaître en outre une transformation remarquable de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 4Bx^3 + Cx^2 + 4Dx + E}} = du;$$

en posant $x = \frac{X}{Y}$, on peut remplacer cette équation par un système d'équations renfermant une fonction arbitraire u, et, dans le cas où cette fonction se réduit à une constante, les valeurs de X et de Y qui satisfont à ce système d'équations donnent les fonctions Θ de Jacobi et les fonctions Al de Weierstrass. Laguerre déduit de là plusieurs résultats importants déjà trouvés par Jacobi et Eisenstein.

Enfin, tandis que Jacobi avait ramené la réduction en fraction continue de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré à la multiplication des fonctions elliptiques, Laguerre, adoptant le point de vue opposé, montre que l'intégrale algébrique de l'équation

$$\frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi,\eta)}} + \frac{n\,dx}{\sqrt{U(x,y)}} = 0,$$

où n est un nombre impair et où η et y sont introduits pour l'homogénéité, résulte de la connaissance de deux polynômes homogènes dont la détermination se ramène à la réduction en fraction continue de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré. Il donne d'ailleurs cette intégrale algébrique sous forme explicite pour le cas de $n = 3$ et pour celui de $n = 5$.

Laguerre s'est aussi occupé avec succès des fonctions abéliennes. Dans un Mémoire trop peu remarqué sur le calcul des *systèmes linéaires*, après avoir développé les règles de ce nouveau calcul qui a une étroite connexion avec les quaternions d'Hamilton, les clefs algébriques de Cauchy et les imaginaires congruentielles de Galois, Laguerre en fait l'application à la théorie des formes et à celles des fonctions abéliennes. En représentant toutes les variables par ce qu'il appelle une *variable linéaire*, il obtient une notation commode à certains

égards, et qui lui permet de condenser en une formule unique les 2^{2n} séries différentes, dont les quotients donnent les fonctions abéliennes d'ordre n. Il parvient ainsi à étendre aux fonctions abéliennes d'ordre quelconque plusieurs propriétés données antérieurement par M. Hermite sur les fonctions du premier ordre, et notamment cette notion capitale des *formes abéliennes* que M. Hermite a introduites dans la Science et qui jouent, dans cette théorie, un rôle analogue à celui des formes binaires dans la théorie des fonctions elliptiques.

Pour achever notre tâche, nous n'avons plus qu'à parler d'un dernier travail concernant l'attraction des ellipsoïdes et où l'on retrouve en quelque sorte inopinément une fort ingénieuse application de cette théorie des imaginaires, qui a toujours été l'étude de prédilection de notre savant ami. La méthode consiste, en effet, à décomposer les ellipsoïdes en tranches comprises entre des plans infiniment voisins et parallèles au plan

$$ix \cos\varphi + iy \sin\varphi + z = 0.$$

Il est vrai que ces plans sont imaginaires et au premier abord la décomposition ne semble avoir aucun sens; mais il résulte des principes établis par M. Hermite, dans sa belle théorie des coupures des intégrales définies, que, si l'on effectue les calculs en attribuant à i une valeur réelle, les résultats obtenus sont encore valables lorsqu'on fait $i = \sqrt{-1}$. C'est ainsi que Laguerre parvient à une expression du potentiel de deux ellipsoïdes qui est relativement d'une extrême simplicité; la comparaison de ses formules avec les résultats, déjà si parfaits, qu'avaient obtenus ses nombreux et célèbres devanciers, conduit à des propositions nouvelles dont la démonstration directe offrirait de sérieuses difficultés.

Le théorème de Laguerre peut être énoncé simplement comme il suit :

Soient $\psi(x, y, z)$ et $\psi_0(x, y, z)$ deux formes quadratiques, Ω et Ω_0 leurs discriminants, et Δ et Δ_0 les valeurs que prennent leurs formes adjointes, quand on y remplace respectivement les variables par

$$\frac{i\cos\varphi}{\sqrt{\Omega}}, \quad \frac{i\sin\varphi}{\sqrt{\Omega}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Omega}}$$

et par

$$\frac{i\cos\varphi}{\sqrt{\Omega_0}}, \quad \frac{i\sin\varphi}{\sqrt{\Omega_0}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Omega_0}}.$$

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées du centre du second ellipsoïde par rapport à des axes rectangulaires passant par le centre du premier; les équations des surfaces extérieures des deux corps étant

$$\psi(x, y, z) = 1,$$
$$\psi_0(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) = 1,$$

représentons par $f(\lambda^2)$ et $f_0(\lambda^2)$ les densités des couches dont les surfaces extérieures ont pour équations

$$\psi(x, y, z) = \lambda^2,$$
$$\psi(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) = \lambda^2,$$

et posons

$$\int_{t^2}^{1} f(\lambda)\,d\lambda = F(t), \qquad \int_{t_0^2}^{1} f_0(\lambda)\,d\lambda = F_0(t_0).$$

Le potentiel P des deux ellipsoïdes s'exprime par la formule

$$P = \frac{9VV_0}{32\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{F(t)F_0(t_0)\,dt\,dt_0\,d\varphi}{i\xi\cos\varphi + i\eta\sin\pi + \zeta - t\sqrt{\Delta} - t_0\sqrt{\Delta_0}},$$

dans laquelle V et V_0 sont les volumes des deux corps et où l'on suppose $\zeta > 0$.

La formule se réduit notablement lorsque les ellipsoïdes sont de révolution, Δ et Δ_0 étant alors des carrés parfaits.

Dans le cas où les ellipsoïdes sont homogènes, en appelant ω et ω_0 leurs densités, on a

$$F(t) = \omega(1 - t^2), \qquad F_0(t_0) = \omega_0(1 - t_0^2).$$

Il est aisé de voir que Δ a la même valeur pour des ellipsoïdes homofocaux, ce qui conduit au théorème de Maclaurin. Mais hâtons-nous d'observer, avec Laguerre, pour faire ressortir pleinement la perfection de la méthode, que ce théorème ne résulte pas seulement du résultat final du calcul : il est encore une conséquence immédiate de la marche même suivie pour effectuer les intégrations. Tous les plans parallèles au plan

$$ix \cos\varphi + iy \sin\varphi + z = 0$$

sont des plans isotropes, et, pour déterminer les limites des intégrations relatives à t et à t_0, il suffit de déterminer ceux de ces plans qui touchent chacun des ellipsoïdes. Comme φ prend toutes les valeurs possibles de 0 à 2π, on a donc à considérer tous les plans isotropes qui sont tangents à chacune des surfaces; et, comme deux surfaces homofocales du second ordre touchent les mêmes plans isotropes, il faut conclure que le potentiel n'est modifié que par l'introduction d'un facteur constant, lorsque l'on substitue à l'un des ellipsoïdes un ellipsoïde homofocal.

Enfin Laguerre montre comment l'expression du potentiel donnée ci-dessus conduit aisément à son développement suivant les puissances de l'inverse de la distance des centres des deux corps.

X.

Tel est l'inventaire des richesses que nous a laissées notre regretté camarade.

On ne saurait s'y méprendre. L'homme que la Science vient de perdre n'était pas seulement un géomètre distingué, habile à trouver d'heureux développements et des solutions élégantes : c'était un inventeur, aux idées neuves et fécondes, dont les écrits sur l'emploi des imaginaires, sur la théorie des équations, sur les cycles, etc., rendront le nom impérissable. « Laguerre », disait M. O. Bonnet, dans un savant Rapport à l'Académie, « est un des géomètres les plus pénétrants de notre époque; ses découvertes en Géométrie lui assignent le premier rang parmi les successeurs de Chasles et de Poncelet, et ses recherches nombreuses et profondes sur l'Algèbre et le Calcul différentiel et intégral accusent un talent d'analyste de premier ordre. »

Et cependant jamais plus de modestie ne s'allia à un mérite si éclatant. « Edmond Laguerre », écrivait notre illustre et vénéré maître, M. Bertrand, pour les funérailles de son jeune Confrère, « Edmond Laguerre, passionné pour la Science, semblait indifférent au succès. Jamais il n'a négligé un devoir; jamais il n'a sollicité une faveur..... Toujours oublieux de se faire valoir, il a pris sa retraite, jeune encore, sans avoir atteint dans l'artillerie les hauts grades où son mérite semblait l'appeler..... Ses découvertes l'avaient placé au premier rang des géomètres français avant que l'Académie des Sciences en eût entendu discuter et proclamer l'importance. »

Hélas! ce fauteuil à l'Institut qu'il avait conquis sans coup férir, il devait à peine l'occuper! C'est au moment

où tout semblait lui sourire et où la bienveillance de M. Bertrand lui ouvrait les portes du Collège de France que la mort est venue nous le ravir. Son beau travail sur l'attraction des ellipsoïdes a été le chant du cygne. A la fin des examens de février, à l'École Polytechnique, une fièvre violente le prit que rien ne put vaincre, ni les soins les plus affectueux, ni le séjour momentané de Versailles, ni l'air du pays natal, conseillé comme dernier recours. Le 14 août 1886, cette belle intelligence s'éteignit doucement, sans avoir livré tous ses secrets.

Puissent sa veuve et ses enfants puiser quelques consolations dans les paroles éloquentes que M. Halphen a prononcées sur sa tombe, et dans le pieux hommage que j'adresse ici à notre cher camarade, au nom de cette École qu'il aima avec passion, sur laquelle il a fait rejaillir tant d'éclat et qui, par un sort étrange, au moment où l'instruction est partout en honneur, semble avoir à se faire pardonner de produire encore de si glorieux enfants.

APPLICATION D'UN THÉORÈME DE STEWART;

Par M. B. NIEWENGLOWSKI.

Étant donnés trois points A, B, C en ligne droite, et un quatrième point O, on a, en vertu d'un théorème de Stewart,

$$(1)\qquad \overline{OA}^2.BC + \overline{OB}^2.CA + \overline{OC}^2.AB + AB.BC.CA = 0,$$

pourvu que les segments AB, BC, CA soient comptés avec le signe + dans un sens, avec le signe — en sens contraire.

Posons

$$\overline{OA}^2 = \alpha + R^2, \qquad \overline{OB}^2 = \beta + R^2, \qquad \overline{OC}^2 = \gamma + R^2;$$

en substituant dans l'égalité (1), on obtient immédiatement

$$(2) \qquad \alpha BC + \beta CA + \gamma AB + AB.BC.CA = 0,$$

équation qui fournit une relation entre les puissances de trois points A, B, C situés en ligne droite, par rapport à un cercle quelconque.

Cette équation, conséquence immédiate du théorème de Stewart, permet de faire une discussion très simple de ce problème :

Mener par deux points A, B *une circonférence tangente à une circonférence donnée* O.

Supposons, en effet, le problème résolu, et soit C le point où la tangente commune à la circonférence cherchée et à la circonférence donnée rencontre la droite AB; on a

$$(3) \qquad \gamma = CA.CB.$$

En introduisant cette hypothèse dans l'équation (2), celle-ci devient

$$\alpha BC + \beta CA = 0$$

ou bien

$$(4) \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Cela étant, si le problème est possible, les points A et B sont évidemment tous deux extérieurs ou tous deux intérieurs au cercle donné O.

Réciproquement, si A et B sont tous deux extérieurs ou tous deux intérieurs au cercle O, on peut choisir sur AB un point C vérifiant l'équation (4); ce point C sera extérieur au segment AB, puisque les puissances

α et β seront de même signe. Or on aura cette fois

$$\alpha BC + \beta CA = 0:$$

d'où, à cause de l'équation (2), il résulte que

$$\gamma = CA.CB.$$

La puissance du point C par rapport au cercle O sera donc positive; on pourra, par suite, mener de C deux tangentes CT, CT′ au cercle O, T et T′ désignant les points de contact. Les égalités

$$CT^2 = CA.CB, \qquad CT'^2 = CA.CB$$

montrent que les cercles passant par A, B, T et A′, B′, T′ sont tangents au cercle donné.

SOLUTION D'UNE QUESTION D'ALGÈBRE;

PAR M. A. AUBRY,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Niewenglowski).

Étant donnée l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, *trouver les substitutions rationnelles qui reproduisent l'équation.*

On sait que, dans le cas du troisième degré, la transformation rationnelle la plus générale est la transformation entière du second degré. C'est donc parmi les substitutions de ce degré qu'il faut chercher les solutions du problème proposé.

D'abord, quel est le nombre de ces solutions? C'est ce que va nous faire connaître le théorème de Bézout. Effectivement, soit

$$y = lx^2 + mx + p \tag{1}$$

l'équation qui définit l'une des substitutions demandées; désignons par x_1, x_2, x_3 les trois racines de l'équation proposée

$$(2) \qquad x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

par y_1, y_2, y_3 les valeurs correspondantes de y et enfin par s_k la somme des puissances k des racines x_1, x_2, x_3. Les quantités y_1, y_2, y_3 doivent représenter, dans un certain ordre, les quantités x_1, x_2, x_3.

Cela étant, si, dans la relation (1), on remplace x successivement par x_1, x_2, x_3 (et en même temps y par y_1, y_2, y_3) et que l'on fasse la somme des résultats obtenus, on aura

$$(3) \qquad s_1 = ls_2 + ms_1 + ps_0.$$

Cette même formule (1) nous fournira par l'élévation au carré

$$y^2 = l'x^4 + m'x^3 + \ldots + p',$$

l', m', ..., p' représentant des fonctions du second degré par rapport aux lettres l, m, p. Nous déduirons de là, comme précédemment,

$$(4) \qquad s_2 = l's_4 + m's_3 + \ldots + p's_0.$$

Nous aurons de même par une élévation au cube

$$(5) \qquad s_3 = l''s_6 + m''s_5 + \ldots + p''s_0,$$

l'', m'', ..., p'' étant des polynômes entiers du troisième degré des quantités l, m, p.

Les égalités (3), (4) et (5) constituent un système de trois équations à trois inconnues l, m, p dont les degrés respectifs sont 1, 2 et 3 : le nombre des solutions est donc égal à $1.2.3 = 6$.

Il s'agit maintenant de trouver ces solutions. Remar-

quons, à cet effet, qu'il peut arriver de trois choses l'une : ou bien on n'a, pour aucune valeur de i,

$$x_i = y_i,$$

ou bien

$$x_i = y_i$$

pour une valeur de i seulement, ou

$$x_i = y_i$$

pour les trois valeurs de i.

Examinons successivement chacune de ces hypothèses :

1° On a, par exemple,

$$y_1 = x_2,$$
$$y_2 = x_3,$$
$$y_3 = x_1;$$

l, m, p vérifient donc les trois équations du premier degré

$$lx_1^2 + mx_1 + p = x_2,$$
$$lx_2^2 + mx_2 + p = x_3,$$
$$lx_3^2 + mx_3 + p = x_1,$$

desquelles nous tirons la valeur de ces inconnues, savoir

$$l = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_1 & 1 \\ x_3 & x_2 & 1 \\ x_1 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{D},$$

$$m = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & 1 \\ x_2^2 & x_3 & 1 \\ x_3^2 & x_1 & 1 \end{vmatrix}}{D},$$

$$p = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & x_2 \\ x_2^2 & x_2 & x_3 \\ x_3^2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}}{D},$$

en posant

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3).$$

On peut exprimer la valeur de D au moyen des coefficients de l'équation proposée, car le discriminant de elle-ci est

$$D^2 = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18\,abc.$$

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} l &= \frac{x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1}{D} \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}{D}, \\ l &= \frac{a^2 - 3b}{D}; \end{aligned}$$

puis

$$m = \frac{x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_3^2x_2 - x_1^3 - x_2^3 - x_3^3}{D}.$$

Il nous faut calculer la fonction des racines

$$t = x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_3^2x_2,$$

qui est susceptible de deux valeurs. Soit t' la seconde

$$t' = x_1x_3^2 + x_1x_1^2 + x_3x_2^2.$$

On a

$$\begin{aligned} t + t' &= \Sigma x_1x_3(x_1 + x_3) = \Sigma x_1x_3(-a - x_2) \\ &= -a\Sigma x_1x_3 - 3x_1x_2x_3, \\ t + t' &= -ab + 3c, \\ t - t' &= x_1x_3(x_1 - x_3) + x_2^2(x_1 - x_3) - x_2(x_1^2 - x_3) \\ &= (x_1 - x_3)(x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_1 - x_2x_3), \\ t - t' &= (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) = -D. \end{aligned}$$

Ces deux relations fournissent les valeurs de t et de t',

$$t = \tfrac{1}{2}(-D - ab + 3c), \qquad t' = \tfrac{1}{2}(D - ab + 3c).$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned}&x_1^3+x_2^3+x_3^3\\&\quad=3x_1x_2x_3+(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-\ldots)\\&\quad=3x_1x_2x_3+(x_1+x_2+x_3)\,\mathrm{D}l\\&\quad=-3c-a(a^2-3b).\end{aligned}$$

Donc

$$m=\frac{\frac{1}{2}(-\mathrm{D}-ab+3c)+3c+a(a^2-3b)}{\mathrm{D}},$$

$$m=\frac{2a^3+9c-7ab-\mathrm{D}}{2\mathrm{D}}.$$

Quant à la valeur de p, c'est

$$\begin{aligned}p&=\frac{x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1-\Sigma x_2^2x_3^2}{\mathrm{D}}\\&=\frac{x_1^2x_2(x_1+x_2)+x_2^2x_3(x_2+x_3)+x_3^2x_1(x_3+x_1)-2\Sigma x_2^2x_3^2}{\mathrm{D}}\\&=\frac{x_1^2x_2(-a-x_3)+x_2^2x_3(-a-x_1)+x_3^2x_1(-a-x_2)-2\Sigma x_2^2x_3^2}{\mathrm{D}}\\&=\frac{-a(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1)-x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)-2\Sigma x_2^2x_3^2}{\mathrm{D}},\end{aligned}$$

$$p=\frac{-at'-ca-2\Sigma x_2^2x_3^2}{\mathrm{D}}.$$

Or

$$\Sigma x_2^2x_3^2=(\Sigma x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=b^2-2ac;$$

donc

$$\begin{aligned}p&=\frac{-at'-ac-2b^2+3ac}{\mathrm{D}}\\&=\frac{3ac-2b^2-\dfrac{a}{2}(\mathrm{D}-ab+3c)}{\mathrm{D}},\end{aligned}$$

$$p=\frac{3ac-4b^2+a^2b-a\mathrm{D}}{2\mathrm{D}}.$$

En résumé la substitution

$$y=\frac{2(a^2-3b)x^2+(2a^3-7ab+9c-\mathrm{D})x+(3ac-4b^2+a^2b-a\mathrm{D})}{2\mathrm{D}},$$

où D désigne l'une quelconque des racines carrées de la quantité $D^2 = a^2 b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc$, donne deux solutions de la question.

Exemple. — $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$; on a ici

$$a = -5, \qquad b = 6, \qquad c = -1,$$

$$\begin{aligned} D^2 &= 25 \times 36 - 4 \times 6 \times 36 - 4 \times 125 - 27 + 18 \times 5 \times 6 \\ &= 36 - 4 \times 5(25 - 27) - 27 = 9 + 4 \times 5 \times 2 = 49, \end{aligned}$$

$$D = \pm 7.$$

$$a^2 - 3b = 25 - 18 = 7,$$

$$\begin{aligned} 2a^3 - 7ab + 9c &= -2 \times 125 + 7 \times 5 \times 6 - 9 \\ &= -5 \times 2(25 - 21) - 9 = -49 = -7 \times 7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3ac - 4b^2 + a^2 b &= 15 - 4 \times 36 + 25 \times 6 \\ &= 15 + 6(-24 + 25) = 21 = 3 \times 7. \end{aligned}$$

En prenant $D = +7$, on obtient

$$l = \frac{7}{7} = 1,$$

$$m = \frac{-7 \times 7 - 7}{2 \times 7} = \frac{-7 - 1}{2} = -4,$$

$$p = \frac{3 \times 7 + 5 \times 7}{2 \times 7} = \frac{8}{2} = 4.$$

Donc la substitution $y = (x - 2)^2$ reproduit l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0.$$

On peut prendre $D = -7$ et l'on a

$$l = \frac{7}{-7} = -1,$$

$$m = \frac{-7 \times 7 + 7}{-2 \times 7} = 3,$$

$$p = \frac{3 \times 7 - 5 \times 7}{-2 \times 7} = 1.$$

Autre exemple. — $x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda = 0$; c'est l'équation qui donne

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{3} = x$$

en fonction de

$$\tang \alpha = \lambda.$$

Il faut faire, dans les formules générales,

$$a = -3\lambda, \qquad b = -3, \qquad c = \lambda.$$

On a alors

$$\begin{aligned} D^2 &= 3 \times 27\lambda^2 + 4 \times 27 + 4 \times 27\lambda^4 - 27\lambda^2 + 18 \times 9\lambda^2 \\ &= 4 \times 27(1 + \lambda^4 + 2\lambda^2) = 4 \times 9 \times 3(1 + \lambda^2)^2, \\ D &= \pm 6(1 + \lambda^2)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$a^2 - 3b = 9\lambda^2 + 9 = 9(1 + \lambda^2),$$

$$2a^3 + 9c - 7ab = -2 \times 27\lambda^3 + 9\lambda - 7 \times 9\lambda = -54\lambda(1 + \lambda^2),$$

$$3ac - 4b^2 + a^2 b = -9\lambda^2 - 4 \times 9 - 3 \times 9\lambda^2 = -36(1 + \lambda^2).$$

Donc

$$l = \frac{9(1 + \lambda^2)}{6(1 + \lambda^2) \times \varepsilon\sqrt{3}} = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{-54\lambda(1 + \lambda^2) - 6(1 + \lambda^2)\sqrt{3} \times \varepsilon}{2 \times 6(1 + \lambda^2)\varepsilon\sqrt{3}} \\ &= -\tfrac{1}{2}(1 + 3\varepsilon\sqrt{3}\lambda), \end{aligned}$$

$$p = \frac{-36(1 + \lambda^2) + 3\lambda \times 6(1 + \lambda^2)\varepsilon\sqrt{3}}{2 \times 6(1 + \lambda^2)\varepsilon\sqrt{3}} = \frac{3\lambda}{2} - \varepsilon\sqrt{3}.$$

Au lieu de garder la transformation entière

$$y = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{1 + 3\lambda\varepsilon\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\lambda - 2\varepsilon\sqrt{3}}{2},$$

nous allons chercher la transformation homographique équivalente. On atteint ce but, comme l'on sait, par une simple division algébrique. Or on trouve

$$\begin{aligned} &x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda \\ &\quad = \left(\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{1 + 3\lambda\varepsilon\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\lambda - 2\varepsilon\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2}{\varepsilon\sqrt{3}}x + \frac{2}{3}\right) \\ &\quad\quad - \tfrac{8}{3}x + \tfrac{4}{3}\varepsilon\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Donc

$$y = -\frac{-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\varepsilon\sqrt{3}}{\frac{2}{\varepsilon\sqrt{3}}x + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}(x - \varepsilon\sqrt{3})}{\frac{2}{3}(x\varepsilon\sqrt{3} + 1)} = \frac{x - \varepsilon\sqrt{3}}{1 + x\varepsilon\sqrt{3}}.$$

On arrive à ce résultat connu, à savoir que, si $x = \operatorname{tang}\varphi$ est une racine, les deux autres sont

$$\frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}} = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\frac{\pi}{3}}{1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\frac{\pi}{3}} = \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{\pi}{3} + \pi\right) = \operatorname{tang}\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

et

$$\frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}} = \frac{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\frac{\pi}{3}}{1 - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\frac{\pi}{3}} = \operatorname{tang}\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$$

2° On a

$$y_1 = x_1,$$
$$y_3 = x_2,$$
$$y_2 = x_3;$$

c'est-à-dire

$$l x_1^2 + m x_1 + p = x_1,$$
$$l x_3^2 + m x_3 + p = x_2,$$
$$l x_2^2 + m x_2 + p = x_3.$$

Ces équations nous donnent les valeurs des inconnues

$$l = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_3 & 1 \\ x_3 & x_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2}{-D},$$

$$l = \frac{2x_1(x_3 - x_2) - (x_3 - x_2)(x_3 + x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)}$$

$$= \frac{2x_1 - x_3 - x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{3x_1 - x_1 - x_2 - x_3}{x_1^2 - x_1(x_2 + x_3) + x_2 x_3}$$

$$= \frac{3x_1 + a}{x_1^2 + x_1(a + x_1) - \dfrac{c}{x_1}} = \frac{x_1(3x_1 + a)}{2x_1^3 + a x_1^2 - c},$$

$$l = \frac{x_1(3x_1 + a)}{-a x_1^2 - 2b x_1 - 3c},$$

$$m = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_3^2 & x_2 & 1 \\ x_2^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{-\mathrm{D}} = \frac{x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_3^3 - x_2^3 - x_1 x_3^2 - x_1^2 x}{-\mathrm{D}}$$

$$= \frac{x_1^2(x_2 - x_3) + x_1(x_2^2 - x_3^2) - (x_2^3 - x_3^3)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}$$

$$= \frac{x_1^2 + x_1(x_2 + x_3) - x_2^2 - x_2 x_3 - x_3^2}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)}$$

$$= \frac{x_1(x_1 + x_2 + x_3) - (x_2 + x_3)^2 + x_2 x_3}{-(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$= \frac{a x_1 + (a + x_1)^2 + \dfrac{c}{x_1}}{x_1^2 + x_1(a + x_1) - \dfrac{c}{x_1}} = \frac{x_1^3 + 3a x_1^2 + a^2 x_1 + c}{2x_1^3 + a x_1^2 - c},$$

$$m = \frac{x_1(2a x_1 + a^2 - b)}{-a x_1^2 - 2b x_1 - 3c},$$

$$p = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & x_1 \\ x_3^2 & x_3 & x_2 \\ x_2^2 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}}{-\mathrm{D}} = x_1 \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & x_2 \\ x_2^2 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}}{-\mathrm{D}}$$

$$= \frac{x_1}{-\mathrm{D}} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_3^2 & x_3 & x_2 - x_3 \\ x_2^2 & x_2 & x_3 - x_2 \end{vmatrix} = \frac{x_1(x_3 - x_2)}{-\mathrm{D}} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_3^2 & x_3 & -1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x_1(x_3 - x_2)}{-\mathrm{D}} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2^2 + x_3^2 & x_2 + x_3 & 0 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x_1(x_3 - x_2)}{-\mathrm{D}} [x_1(x_2 + x_3) - x_2^2 - x_3^2].$$

$$p = \frac{x_1(x_3 - x_2)[x_1(x_2 + x_3) - x_2^2 - x_3^2]}{-(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)}$$

$$= \frac{x_1[x_1(-a - x_1) - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2x_3]}{x_1^2 - x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3}$$

$$= \frac{x_1\left[-(a + x_1)(a + 2x_1) - \dfrac{2c}{x_1}\right]}{x_1^2 + x_1(a + x_1) - \dfrac{c}{x_1}}$$

$$= \frac{-x_1(2x_1^3 + 3ax_1^2 + a^2x_1 + 2c)}{2x_1^3 + ax_1^2 - c}$$

$$= \frac{-(2x_1 + a)(x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c) + 2bx_1^2 + abx_1 + ac}{-ax_1^2 - 2bx_1 - 3c},$$

$$p = \frac{2bx_1^2 + abx_1 + ac}{-ax_1^2 - 2bx_1 - 3c}.$$

En remplaçant x par chacune des trois racines de l'équation donnée, nous obtiendrons trois solutions de la question.

On sait comment on pourrait ramener les expressions précédentes de l, m, p à la forme $\frac{\alpha x_1 + \beta}{\alpha' x_1 + \beta'}$.

On voit facilement comment on pourrait former l'équation du troisième degré dont dépend l'un des coefficients l, m, p et déterminer rationnellement les deux autres en fonction de celui-là. Il faudra en tous cas résoudre une équation du troisième degré qui a le même nombre de racines réelles que la proposée.

3° Si l'on a

$$lx_i^2 + mx_i + p = x_i$$

pour les trois valeurs 1, 2, 3 de l'indice i, on a identiquement

$$lx^2 + mx + p = x,$$

c'est-à-dire

$$l = p = 0, \qquad m = 1.$$

Nous trouvons ainsi la solution $y = x$, qui était à prévoir.

Remarques. — 1. En supposant réels les coefficients

de l'équation proposée, quatre des substitutions trouvées sont à coefficients réels. En effet, quand les racines x_1, x_2, x_3 sont réelles, D^2 est négatif, et par suite D imaginaire : les deux solutions trouvées dans le premier cas sont imaginaires et les quatre autres sont réelles; si, au contraire, x seule est réelle, D^2 est positif et les seules solutions imaginaires sont celles du deuxième cas qui correspondent à x_2 et x_3.

2. On pourrait se proposer de généraliser la question et de prendre, au lieu d'une équation du troisième degré, une équation de degré n. Le nombre des solutions serait alors $1.2.3\ldots n$; il est remarquable que ce nombre est précisément le degré de l'équation de la résolution de laquelle Lagrange, cherchant à généraliser ce que l'on connaissait relativement à la résolution des équations du troisième et du quatrième degré, avait fait dépendre celle de l'équation du degré n.

En étendant l'analyse exposée précédemment, on peut d'ailleurs ramener la résolution de cette équation de degré $n!$ à celles de plusieurs équations de degrés moindres et au nombre de n. On est en effet naturellement conduit à distinguer n cas :

1° on n'a $x_i = y_i$ pour aucune valeur de i;
2° on a $y_i = x_i$ pour une seule » ;
3° » » pour deux » ;
4° » » pour trois » ;
....;
$(n-1)$° » pour $n-2$ » ;
n° » pour $n-1$ et par suite pour n.

Mettons de côté le $n^{\text{ième}}$ cas, qui comporte évidemment une seule solution $y = x$, et appelons u_n le nombre de solutions qui correspondent au premier. Considérons le $(p+1)^{\text{ième}}$ cas, celui où $x_i = y_i$ pour p valeurs de i;

laissons d'abord fixes ces valeurs de i : nous aurons un nombre de solutions égal à u_{n-p}; cela est évident d'après la définition même de u_k. Or il y a C_n^p manières de supposer l'égalité $x_i = y_i$ satisfaite pour p valeurs de i; donc le nombre de solutions afférentes au $(p+1)^{\text{ième}}$ cas est

$$C_n^p u_{n-p}.$$

De plus nous avons, en égalant deux expressions du nombre de solutions

$$u_n + C'_n u_{n-1} + \ldots + C_n^p u_{n-p} + \ldots + C_n^{n-2} u_2 + 1 = n!.$$

En faisant successivement $n = 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$, n dans cette formule, on calculera u_2, puis u_3, u_4, u_5, ..., u_{n-1}, u_n. Attribuons à n la valeur 2; nous trouvons

$$u_2 + 1 = 1.2, \qquad u_2 = 1,$$

ce qui était à prévoir.

Si $n = 3$, on a

$$u_3 + 3u_2 + 1 = 1.2.3, \qquad u_3 = 6 - 3 - 1 = 2,$$

résultat que nous avons effectivement trouvé.

Remplaçons n par 4 et nous trouvons

$$u_4 + 4u_3 + 6u_2 + 1 = 1.2.3.4,$$
$$u_4 = 24 - 8 - 6 - 1 = 9.$$

Ainsi, dans le cas du quatrième degré, la résolution de l'équation du vingt-quatrième degré, qui résout la question posée, se ramène à la résolution de quatre équations dont les degrés respectifs sont

$$u_4 = 9, \qquad 4u_3 = 8, \qquad 6u_2 = 6, \qquad 1.$$

La façon la plus simple de calculer u_n consiste à remarquer que l'on a

$$u_n = nu_{n-1} + (-1)^n.$$

Pour le démontrer, posons $u_k = k!\, v_k$; nous aurons

$$v_n - \frac{C'_n}{n} v_{n-1} + \ldots$$
$$+ \frac{C_n^p}{n(n-1)\ldots(n-p+1)} v_{n-p} + \ldots + \frac{C_n^{n-2}}{n\ldots 3} v_2 + \frac{1}{n!} = 1,$$

c'est-à-dire

$$v_n + \frac{1}{1!} v_{n-1} + \ldots + \frac{1}{p!} v_{n-p} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{(n-3)!} v_3 + \frac{1}{(n-2)!} v_2 + \frac{1}{n!} = 1.$$

Retranchons de cette égalité celle que l'on obtient en y remplaçant n par $n-1$ et nous verrons que

$$(v_n - v_{n-1}) + \frac{1}{1!}(v_{n-1} - v_{n-2}) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{p!}(v_{n-p} - v_{n-p-1}) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{(n-3)!}(v_3 - v_2) + \frac{1}{(n-2)!} v_2 + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} = 0.$$

La forme de cette relation montre que, si l'on y attribue successivement à n les valeurs $n, n-1, \ldots, 3$, on obtiendra un système de $n-3$ équations linéaires par rapport aux inconnues $v_n - v_{n-1}, \ldots, v_k - v_{k-1}, \ldots, v_3 - v_2$ qui admettra un système unique de solutions. Or, si l'on fait généralement $v_k - v_{k-1} = \frac{(-1)^k}{k!}$ et $v_2 = \frac{1}{2}$ dans le premier membre de la précédente égalité, le résultat a pour expression

$$\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,1!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)!\,p!} + \ldots$$
$$+ \frac{(-1)^3}{(n-3)!\,3!} + \frac{(-1)^2}{(n-2)!\,2!} + \frac{1}{n!} + \frac{(-1)^1}{(n-1)!\,1!}$$
$$= (-1)^n n!\,[1 - C_n^1 + \ldots + (-1)^p C_n^p + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-2} C_n^{n-2} + (-1)^n + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}]$$
$$= (-1)^n n!\,(1-1)^n = 0.$$

La solution du système en question est donc

$$v_k - v_{k-1} = \frac{(-1)^k}{k!} \qquad (k = n, n-1, \ldots, 3).$$

Ainsi, l'on a bien

$$\frac{u_n}{n!} - \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!},$$

ce qui équivaut à

$$u_n = n u_{n-1} + (-1)^n.$$

On voit que u_n croît à peu près aussi rapidement que n!

L'expression de u_n en fonction de n s'obtient facilement en employant la relation précédente; on en déduit immédiatement

$$\frac{u_n}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{u_2}{2!}$$

ou, puisque $u_2 = 1$,

$$u_n = n! \left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

L'expression entre crochets est le développement de $\frac{1}{e}$, arrêté au $(n+1)^{\text{ième}}$ terme; donc pour $n \geq 3$, $\frac{u_n}{n!}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Observons que l'équation de degré u_n, à laquelle nous sommes arrivé, ne renferme que n coefficients arbitraires, ceux de l'équation proposée de degré n; elle n'est donc pas la plus générale de son degré. Il est visible que si la proposée peut être résolue, elle pourra l'être également et sa résolution dépendra de celle d'une équation de degré n au plus.

A l'égard de l'équation de degré $C_n^{n-p} u_p (p \geq 2)$, nous

remarquerons qu'elle peut être résolue si la proposée est aussi résoluble.

De ce qui précède, il ressort que, si l'équation proposée f peut être résolue, il en sera de même de notre résolvante φ du degré $n!$; si l'on peut trouver seulement q racines de f, on en pourra trouver

$$C_q^1 u_{n-1} + C_q^2 u_{n-2} + \ldots + C_q^{q-2} u_{n-q+2} + C_q^{q-1} u_{n-q+1} + u_{n-q}$$

de φ.

Supposons que, réciproquement, l'équation φ soit résoluble, ou même seulement que l'on puisse trouver une racine de l'équation de degré u_n dont il a été parlé. On aura

$$x_2 = \theta(x_1), \qquad x_3 = \theta(x_2), \qquad \ldots,$$
$$x_n = \theta(x_{n-1}), \qquad x_1 = \theta(x_n),$$

$\theta(x)$ désignant une fonction rationnelle de x. On en déduira

$$x_2 = \theta(x_1), \qquad x_3 = \theta[\theta(x_2)] = \theta^2(x_2), \qquad \ldots,$$
$$x_n = \theta^{n-1}(x_{n-1}), \qquad x_1 = \theta^n(x_n).$$

L'équation f sera abélienne et par conséquent résoluble algébriquement.

Si l'on sait calculer une racine de l'équation de degré $C_n^p u_{n-p}$, $n-p$ racines de l'équation f pourront être exprimées rationnellement à l'aide des p autres et l'on peut affirmer que l'équation f est susceptible d'abaissement.

En résumé, on a ce théorème :

Pour que l'équation $\varphi = 0$ soit résoluble algébriquement, il faut et il suffit que l'équation f soit elle-même résoluble.

On voit maintenant pourquoi, dans le cas du troisième degré, on a dû nécessairement, pour résoudre complète-

ment φ, résoudre d'abord l'équation f (ou une autre tout à fait analogue).

SUR UNE APPLICATION DU THÉORÈME DE ROLLE;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Si l'on prend les dérivées par rapport à x et à y de l'expression $(x^2+y^2-r^2)^n$, α fois par rapport à x et β fois par rapport à y, les nombres α et β étant des entiers quelconques, mais tels que $2n-(\alpha+\beta)>0$, on obtient une fonction de degré $2n-(\alpha+\beta)$ en x et y. Si l'on égale à zéro cette fonction, l'équation obtenue représente une courbe qui, abstraction faite des axes de coordonnées, se trouve tout entière renfermée dans le cercle $x^2+y^2-r^2=0$.

Nous allons démontrer cette propriété, bien connue d'ailleurs, en nous appuyant sur les théorèmes suivants :

2. THÉORÈME I. — *Si $\Phi(x)$ est un polynôme en x^2 dont tous les zéros sont imaginaires, mais de la forme $\pm ai$, a étant une quantité réelle, les équations que l'on obtient en égalant à zéro les dérivées successives de $\Phi(x)$ n'ont d'autres racines réelles que $x=0$ et leurs racines imaginaires sont toutes de la même forme que celles de $\Phi(x)=0$.*

En effet, soit

$$\Phi(x)=\varphi(x^2),$$

on aura

$$\Phi'(x)=2x\,\varphi'(x^2).$$

Si l'on pose $x^2=z$, l'équation $\varphi(z)=0$ a toutes ses

racines réelles et négatives ; par suite, l'équation $\varphi'(z) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles et négatives : le théorème est donc démontré pour l'équation

$$\Phi'(x) = 0.$$

Formons $\Phi''(x)$, on a

$$\Phi''(x) = 4x^2\varphi''(x^2) + 2\varphi'(x^2);$$

l'équation $\Phi''(x) = 0$ ne contient que des puissances paires de x; en posant $x^2 = z$, nous allons montrer que l'équation

$$4z\varphi''(z) + 2\varphi'(z) = 0$$

a toutes ses racines réelles et négatives. En effet, l'équation $\varphi(z) = 0$ ayant toutes ses racines réelles et négatives, il en est de même de l'équation $\varphi'(z) = 0$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines de cette équation ; substituons-les dans la fonction

$$4z\varphi''(z) + 2\varphi'(z),$$

elle devient successivement

$$4\alpha_1\varphi''(\alpha_1), \quad 4\alpha_2\varphi''(\alpha_2), \quad \ldots, \quad 4\alpha_n\varphi''(\alpha_n).$$

Les quantités $\varphi''(\alpha_1)$, $\varphi''(\alpha_2)$, . ., $\varphi''(\alpha_n)$, d'après le théorème de Rolle, sont de signes contraires, par conséquent la suite des quantités

$$4\alpha_1\varphi''(\alpha_1), \quad 4\alpha_2\varphi''(\alpha_2), \quad \ldots, \quad 4\alpha_n\varphi''(\alpha_n)$$

ne présente que des variations. L'équation

$$4z\varphi''(z) + 2\varphi'(z) = 0$$

a donc $n - 1$ racines réelles comprises entre α_1 et α_2, α_2 et α_3, ..., α_{n-1} et α_n ; comme elle est de degré n, elle a toutes ses racines réelles.

La $n^{\text{ième}}$ racine ne peut pas être positive, car $\varphi''(z)$

et $\varphi'(z)$ sont des polynômes qui ne présentent pas de variations, puisque tous leurs zéros sont réels et négatifs; par suite

$$4z\varphi''(z)+2\varphi'(z)$$

n'en présente pas non plus; toutes les racines de l'équation

$$4z\varphi''(z)+2\varphi'(z)=0$$

sont donc réelles et négatives. On en conclut que les racines de l'équation $\Phi''(x)=0$ sont toutes imaginaires et de même forme que celles de $\Phi(x)=0$.

Il est bien évident que ces deux propositions démontrent le théorème.

3. Théorème II. — *Si $\Phi(x)$ est un polynôme en x^2, tel que l'équation $\Phi(x)=0$ n'admette pour racines imaginaires que des quantités de la forme $\pm ai$, a étant réel, les dérivées successives de $\Phi(x)$ égalées à zéro nous fourniront des équations dont toutes les racines réelles sont comprises entre la plus grande et la plus petite des racines réelles de $\Phi(x)=0$.*

Si

$$\Phi(x)=(x^2-a_1^2)(x^2-a_2^2)\dots(x^2-a_n^2)(x^2+\alpha_1^2)\dots(x^2+\alpha_p^2),$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ étant des quantités que nous supposerons positives et rangées dans l'ordre croissant, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des quantités réelles, les racines réelles des équations $\Phi^{(\mu)}(x)=0$ sont toutes comprises entre $-a_n$ et $+a_n$.

Posons encore

$$\Phi(x)=\varphi(x^2),$$

on aura

$$\Phi'(x)=2x\varphi'(x^2);$$

en posant, comme précédemment, $x^2=z$, l'équation $\varphi'(z)=0$ a toutes ses racines réelles.

$\Phi'(x) = 0$ a pour racines réelles zéro et $2(n-1)$ autres racines comprises entre les nombres des suites

$$-a_n, \quad -a_{n-1}, \quad \ldots, \quad -a_1$$

et

$$+a_1, \quad +a_2, \quad \ldots, \quad +a_{n-1}, \quad +a_n.$$

Soient

$$-b_{n-1}, \quad -b_{n-2}, \quad \ldots, \quad -b_1, \quad 0,$$
$$+b_1, \quad +b_2, \quad \ldots, \quad +b_{n-1}$$

les $2n-1$ racines réelles de l'équation dérivée

$$\Phi'(x) = 0,$$

que le théorème de Rolle nous permet de mettre immédiatement en évidence; une autre racine de l'équation $\varphi'(z) = 0$ est comprise entre a_1^2 et $-\alpha_1^2$; elle peut être positive ou négative. Si elle est positive, à cette racine correspondront deux racines réelles de l'équation $\Phi'(x) = 0$, en valeur absolue moindres que a_1 et, si elle est négative, il lui correspondra, dans $\Phi'(x) = 0$, deux racines imaginaires de la forme $\pm ai$; quant aux racines de $\varphi'(z) = 0$, comprises entre $-\alpha_1^2$ et $-\alpha_p^2$, il ne leur correspond dans $\Phi'(x) = 0$ que des racines imaginaires de la forme $\pm ai$; l'équation $\Phi'(x) = 0$ n'a donc pour racines réelles que des quantités comprises entre $-a_n$ et $+a_n$, ce qui démontre le théorème pour $\Phi'(x)$

On a, comme précédemment,

$$\Phi''(x) = 4x^2\varphi''(x^2) + 2\varphi'(x^2) = \theta(x^2).$$

L'équation $\Phi''(x) = 0$ ne renferme que des puissances paires de x; en posant $x^2 = z$, elle devient

$$\theta(z) = 4z\varphi''(z) + 2\varphi'(z) = 0.$$

Cette équation a toutes ses racines réelles.

En effet, nous avons vu que $\Phi'(x) = 0$ a $2n-1$ ra-

cines réelles

$$-b_{n-1},\quad -b_{n-2},\quad \ldots,\quad -b_1,\quad 0,\quad +b_1,\quad \ldots,\quad +b_{n-1}.$$

et qu'elle pouvait avoir de plus deux autres racines réelles entre o et b_1 et entre o et $-b_1$. Elle a toujours au moins $2(p-1)$ racines imaginaires de la forme $\pm ai$. Si $\Phi'(x)=0$ a $2n-1+2$ racines réelles, $\Phi''(x)=0$ a $2n$ racines réelles dans les intervalles présentés par les premières; mais alors $\Theta(z)=0$ a n racines positives et $p-2$ racines négatives; car nous avons vu que $\varphi'(z)=0$ a $p-1$ racines négatives, et ces racines substituées dans $\Theta(z)$ donnent des résultats de substitution de signes contraires. L'équation

$$\Theta(z)=0$$

a donc, dans ce cas, $n+p-2$ racines réelles et, comme elle n'est que de degré $n+p-1$, toutes ses racines sont réelles.

Si, au contraire, $\Phi(x)=0$ n'a que $2n-1$ racines réelles, $\Phi''(x)=0$ n'aura que $2n-2$ racines réelles dans l'intervalle de $-b_{n-1}$ à $+b_{n-1}$, mais alors

$$\varphi'(z)=0$$

a p racines négatives qui sépareront $p-1$ racines réelles de $\Theta(z)=0$; on en conclut que $\Theta(z)=0$ a $n+p-2$ racines réelles et, par suite, que, dans les deux cas, toutes ses racines sont réelles.

L'équation $\Theta(x^2)=0$ est de la forme de $\Phi(x)=0$; elle n'a, d'après ce que nous venons de démontrer, que des racines réelles et des racines imaginaires de la forme $\pm ai$; on démontrerait sur cette équation que ses deux premières équations dérivées remplissent également les conditions de l'énoncé, et ainsi de suite.

Il faut toutefois que la $(n+p-1)^{\text{ième}}$ racine de

$\Theta(z) = 0$, sur l'ordre de grandeur de laquelle nous ne savons rien jusqu'ici, soit moindre que a_n, si elle est positive. Nous allons démontrer qu'elle est moindre que la plus grande racine positive α de l'équation $\varphi'(z) = 0$; elle sera alors moindre que a_n. Il suffit de faire voir que $\Theta(+\infty)$ et $\Theta(\alpha)$ sont de mêmes signes. Or, $\Theta(+\infty)$ est du signe de $\varphi''(+\infty)$, $\Theta(\alpha)$ est du signe de $\varphi''(\alpha)$; entre α et $+\infty$, $\varphi''(z) = 0$ n'a pas de racine : donc, $\Theta(+\infty)$ et $\Theta(\alpha)$ sont de mêmes signes.

4. Les théorèmes I et II subsistent, quand même un certain nombre de facteurs de la forme $x^2 - a^2$ ou $x^2 + \alpha^2$ deviennent égaux entre eux.

En particulier, si toutes les racines sont imaginaires et deviennent égales deux par deux, c'est-à-dire si

$$\Phi(x) = (x^2 + \alpha^2)^n,$$

toutes les équations $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ ont toutes leurs racines imaginaires, sauf la racine $x = 0$; si

$$\Phi(x) = (x^2 - a^2)^n,$$

toutes les équations $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ ont leurs racines réelles et comprises entre $-a$ et $+a$.

Les démonstrations précédentes s'appliquent sans modifications sensibles.

Cela posé, nous allons passer à la démonstration du théorème énoncé au début.

5. Considérons la fonction $U = (x^2 + y^2 - r^2)^n$.

Nous allons démontrer que l'équation

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0$$

représente une courbe qui, abstraction faite des axes de

coordonnées, est renfermé tout entière dans le cercle $x^2+y^2-r^2=0$.

La dérivée $\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}$ est de la forme

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}=(x^2+y^2-r^2)^{n-\alpha}\Phi(x,y);$$

$\Phi(x,y)$ étant un polynôme en x^2 et y^2, et qui renferme x en facteur s'il est de degré impair. On voit, à l'inspection de ce polynôme, qu'il est de la forme

$$x^\varepsilon\varphi(x^2,\ x^2+y^2-r^2),$$

la fonction φ étant homogène en x^2 et $x^2+y^2-r^2$, et ε étant zéro ou un.

On pourra donc écrire

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}=x^\varepsilon(x^2+y^2-r^2)^{n-\alpha}\varphi(x^2,\ x^2+y^2-r^2).$$

La fonction homogène $\varphi(x^2,\ x^2+y^2-r^2)$ peut être décomposée en un produit de facteurs de la forme

$$\begin{aligned}&\mathrm{N}(x^2+y^2-r^2+\lambda_1x^2)\\&\quad(x^2+y^2-r^2+\lambda_2x^2)\ldots(x^2+y^2-r^2+\lambda_{\alpha'}x^2);\end{aligned}$$

les quantités $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\alpha'}$ sont indépendantes de x, de y et de r : ce sont des quantités numériques réelles et positives.

En effet, dans l'hypothèse de $r^2-y^2>0$, les racines de l'équation

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}=0$$

sont, d'après les théorèmes précédents, toutes réelles et comprises entre

$$-\sqrt{r^2-y^2}\quad\text{et}\quad+\sqrt{r^2-y^2}.$$

Comme on doit avoir, en désignant par x_μ une de ces

racines,

$$x_\mu^2 + y^2 - r^2 + \lambda x_\mu^2 = 0$$

et que

$$x_\mu^2 < r^2 - y^2,$$

il s'ensuit que

$$x_\mu^2 + y^2 - r^2 < 0,$$

et, par suite, λx_μ^2 est positif, ce qui exige que λ soit positif.

Nous avons supposé, pour établir ce résultat, que $r^2 - y^2 > 0$; il est évident que, les quantités λ étant indépendantes de x, de y et de r, la conclusion précédente subsiste dans tous les cas ; on a donc

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha} = N x^\varepsilon (x^2 + y^2 - r^2)^{n-\alpha} [x^2(1 + \lambda_1) + y^2 - r^2]$$
$$\times [x^2(1 + \lambda_2) + y^2 - r^2] \ldots [x^2(1 + \lambda_{\alpha'}) + y^2 - r^2].$$

En égalant à zéro $\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}$, on obtient un certain nombre de fois le cercle $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, l'axe de y si $\varepsilon \gtrless 0$, et enfin une série d'ellipses, dont les équations sont toutes de la forme

$$x^2(1 + \lambda) + y^2 - r^2 = 0,$$

qui ont pour grand axe le diamètre vertical du cercle, pour petit axe une portion du diamètre horizontal. Elles sont donc renfermées dans le cercle

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Si maintenant on prend β fois la dérivée par rapport à y de

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha},$$

on obtient un polynôme en x et y de degré

$$2n - (\alpha + \beta).$$

Ce polynôme, considéré comme une fonction de y,

provenant par β dérivations successives du polynôme en y^2, $\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}$ a, d'après le théorème II, tous ses zéros réels compris entre la plus grande et la plus petite racine réelle de l'équation

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Il est évident que la quantité $r^2 - x^2$ est supérieure à toutes les quantités de la forme

$$r^2 - x^2(1 + \lambda),$$

où λ est une quantité positive. Par suite, toutes les racines réelles de l'équation en y

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0$$

sont comprises entre

$$-\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{r^2 - x^2};$$

on a donc, en désignant par y_μ une racine réelle quelconque de cette équation,

$$y_\mu^2 < r^2 - x^2$$

ou bien

$$x^2 + y_\mu^2 - r^2 < 0;$$

les points de coordonnées x et y_μ sont donc situés à l'intérieur du cercle

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Ce sont d'ailleurs les seules solutions réelles de l'équation ; car, si $r^2 - x^2 < 0$, toutes les racines en y de l'équation

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha} = 0$$

sont imaginaires, à l'exception de la racine $y = 0$, si elle s'y trouve.

6. Considérons maintenant la fonction plus complexe

$$V = (x^4 + y^4 - r^4)^n,$$

la dérivée d'ordre α de V,

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha} = x^\varepsilon (x^4 + y^4 - r^4)^{n-\alpha} \varphi(x^4 + y^4 - r^4, x^4),$$

ε étant l'un des nombres 0, 1, 2, 3 et

$$\varphi(x^4 + y^4 - r^4, x^4)$$

une fonction homogène des quantités $x^4 + y^4 - r^4$ et x^4, dont les coefficients sont indépendants de x, de y et de r.

On voit immédiatement que, si l'on prend les dérivées successives de $(x^4 + \alpha^4)^n$, ces dérivées sont de la forme

$$x^\varepsilon (x^4 + \alpha^4)^{n-\mu} \Theta(x^4),$$

ε étant l'un des nombres 0, 1, 2, 3 et Θ une fonction de x^4 qui n'a que des permanences; l'équation obtenue en égalant à zéro l'une quelconque de ces dérivées a donc toutes ses racines imaginaires, excepté la racine $x = 0$.

Pour que les dérivées de $(x^4 + y^4 - r^4)^n$, égalées à zéro, aient des racines réelles, il faut donc que

$$r^4 - y^4 > 0.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}(x^4 + y^4 - r^4)^n &= [x^4 - (r^4 - y^4)]^n \\ &= (x^2 - \sqrt{r^4 - y^4})^n (x^2 + \sqrt{r^4 - y^4})^n,\end{aligned}$$

cette fonction rentrant dans le type de celles du théorème II.

On en conclut que l'équation

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha} = 0$$

a toutes ses racines réelles comprises entre

$$-\sqrt[4]{r^4-y^4} \quad \text{et} \quad +\sqrt[4]{r^4-y^4}\,:$$

et l'on en conclut aussi que

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha} = N x^\varepsilon (x^4+y^4-r^4)^{n-\alpha}$$
$$(x^4+y^4-r_4+\lambda_1 x^4)\ldots(x^4+y^4-r^4+\lambda_{\alpha'} x^4).$$

Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\alpha'}$ sont réelles et positives ; la démonstration se fait comme dans le cas précédent.

En vertu d'un théorème plus général que nous énoncerons plus loin, si $\Phi(x)$ est un polynôme de la forme

$$\Phi(x) = (x^4 - a_1^4)(x^4 - a_2^4)\ldots$$
$$(x^4 - a_n^4)(x^4 + \alpha_1^4)\ldots(x^4 + \alpha_p)^4,$$

les équations dérivées $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ ont toutes leurs racines réelles comprises entre la plus grande et la plus petite racine de $\Phi(x) = 0$, c'est-à-dire entre $-a_n$ et $+a_n$, si a_n est la plus grande des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En prenant les dérivées d'ordre β des deux membres de l'égalité

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha} = x^\varepsilon (x^4+y^4-r^4)^{n-\alpha}$$
$$(x^4+y^4-r^4+\lambda_1 x^4)\ldots(x^4+y^4-r^4+\lambda_{\alpha'} x^4),$$

on obtient la fonction $\frac{\partial^{\alpha+\beta} V}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ qui, égalée à zéro, a toutes ses racines comprises entre $-\sqrt{r^4-x^4}$ et $+\sqrt{r^4-x^4}$, et, pour qu'elle ait des racines réelles, il faut que

$$r^4 - x^4 > 0.$$

On en conclut, comme précédemment, que toutes les courbes

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} V}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0$$

sont renfermées dans la courbe

$$x^4 + y^4 - r^4 = 0.$$

7. Si l'on considère la fonction

$$W = (x^{2m} + y^{2m} - r^{2m})^n,$$

l'équation

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} W}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0$$

représente des courbes qui, abstraction faite des axes de coordonnées, sont toutes renfermées dans la courbe

$$x^{2m} + y^{2m} - r^{2m} = 0.$$

Cette proposition est une conséquence des théorèmes suivants :

I. *Si $\Phi(x)$ représente le polynôme*

$$\Phi(x) = (x^{2m} + a_1^{2m})(x^{2m} + a_2^{2m}) \ldots (x^{2m} + a_n^{2m}),$$

les racines de $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ sont toutes imaginaires; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont supposées des quantités réelles.

II. *Si $\Phi(x)$ représente le polynôme*

$$\Phi(x) = (x^{2m} - a_1^{2m})(x^{2m} - a_2^{2m}) \ldots \\ (x^{2m} - a_n^{2m})(x^{2m} + \alpha_1^{2m}) \ldots (x^{2m} + \alpha_p^{2m}),$$

les équations $\Phi^{(\mu)}(x) = 0$ ont toutes leurs racines réelles comprises entre la plus grande et la plus petite racine réelle de $\Phi(x) = 0$.

La démonstration de ces théorèmes est tout à fait analogue à celle des théorèmes du même genre que nous avons démontrés dans le cas de $m = 1$; nous n'insisterons pas pour éviter des longueurs et nous allons passer à une généralisation qui s'offre d'elle-même.

8. Considérons la fonction

$$U = (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^n.$$

Je vais démontrer que les surfaces représentées par les équations

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = 0$$

sont, abstraction faite des plans coordonnés, toutes renfermées dans la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

En effet,

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha} = x^\varepsilon (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^{n-\alpha} \Phi(x, y, z)$$
$$(\varepsilon = 0 \quad \text{ou} \quad \varepsilon = 1).$$

On montrera, comme précédemment, que $\Phi(x, y, z)$ est de la forme

$$\Phi(x, y, z) = N(x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 x^2)$$
$$(x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_2 x^2) \ldots (x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_{\alpha'} x^2),$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\alpha'}$ étant des quantités positives et N un nombre. $\Phi(x, y, z) = 0$ représente donc une série d'ellipsoïdes renfermés tous dans la sphère.

La fonction $\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}$ peut s'écrire aussi

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha} = x^\varepsilon [A_0 (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^\mu$$
$$+ A_1 x^2 (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^{\mu-1} + \ldots + A_\mu x^{2\mu}].$$

Si l'on prend β fois la dérivée des deux membres par rapport à y, il viendra

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = x^\varepsilon y^\eta \left[\sum B (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^\nu x^{2p} y^{2q} \right],$$

η étant, comme ε, zéro ou un, et la somme $2\nu + 2p + 2q$

étant la même pour tous les termes du polynôme qui figure dans le second membre.

Les racines de l'équation en y, représentée par

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} = 0,$$

sont, d'après les théorèmes démontrés, toutes comprises entre

$$-\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{r^2 - x^2 - z^2},$$

si elles sont réelles.

Elles sont toutes imaginaires si $r^2 - x^2 - z^2 < 0$.

Le polynôme

$$\frac{1}{x^{\epsilon} y^{\eta}} \frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}}$$

étant homogène en $x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, x^2 et y^2, si l'on pose

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = -\lambda' y^2,$$

l'équation

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} U}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} = 0$$

devient

$$\sum B \lambda'^{\nu} \left(\frac{x}{y}\right)^{2p} = 0.$$

Dans cette équation, la quantité λ' est indépendante de z, et l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = -\lambda' y^2$ montre que les quantités λ' sont positives. On pourra alors poser

$$\sum B(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^{\nu} x^{2p} y^{2q} = N'(x^2 + y_2 + z^2 - r^2)^{n-\alpha-\beta}$$
$$\times (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + \lambda'_1 y^2) \ldots (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + \lambda'_{\beta'} y^2);$$

les quantités λ'_1, λ'_2, ... sont des fonctions de x et de y seulement, et elles sont positives. En prenant γ fois la dérivée par rapport à z, on obtiendra une expression

qui, égalée à zéro, aura ses racines réelles comprises entre

$$-\sqrt{r^2-x^2-y^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{r^2-x^2-y^2};$$

elles satisfont donc à la condition

$$z^2 < r^2 + x^2 - y^2,$$

ou

$$x^2+y^2+z^2-r^2 < 0.$$

Les points réels représentés par l'équation

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\nu}U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\nu} = 0$$

sont donc tous renfermés dans la sphère

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0,$$

à l'exception de ceux qui sont donnés par les équations

$$x^\xi = 0, \quad y^\eta = 0, \quad z^\zeta = 0.$$

La même proposition s'étend aux surfaces tirées par dérivation de l'expression

$$(x^{2m}+y^{2m}+z^{2m}-r^{2m})^n.$$

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE;

PAR M. WEILL.

Soit une variable x et une constante k. Posons

$$y = x + \frac{k}{x} \qquad \text{et} \qquad V_p = x^p + \frac{k^p}{x^p}.$$

On aura

$$V_p = y V_{p-1} - k V_{p-2}.$$

Cette relation permet de calculer la fonction V_p, considérée comme un polynôme en y; il est facile de former une équation différentielle du second ordre, à laquelle satisfait cette fonction. On a

$$\frac{dV_p}{dx} = px^{p-1} - pk^p x^{-p-1},$$

$$\frac{d^2V_p}{dx^2} = p[(p-1)x^{p-2} + k^p(p+1)x^{-p-2}] = \frac{p^2}{x^2}V_p - \frac{1}{x}\frac{dV_p}{dx},$$

$$\frac{dV_p}{dx} = \frac{dV_p}{dy}\left(1 - \frac{k}{x^2}\right),$$

$$\frac{d^2V_p}{dx^2} = \frac{d^2V_p}{dy^2}\left(1 - \frac{k}{x^2}\right)^2 + \frac{2k}{x^3}\frac{dV_p}{dy};$$

d'où, en désignant par V la fonction de y,

$$\frac{d^2V}{dy^2}(y^2 - 4k) + y\frac{dV}{dy} - p^2V = 0.$$

Cette équation permet de calculer facilement le polynôme V. En faisant $k = 1$, on retrouve des résultats très connus. Le polynôme V_p est égal à la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation

$$Z^2 - yZ + k = 0.$$

SUR LES COURBES UNICURSALES;

PAR M. WEILL.

Les équations

$$x = \frac{a\lambda^p + b\lambda^{p-1} + \ldots}{a'\lambda^p + b'\lambda^{p-1} + \ldots}, \qquad y = \frac{k\lambda^p + l\lambda^{p-1} + \ldots}{a'\lambda^p + b'\lambda^{p-1} + \ldots},$$

qui définissent une courbe unicursale de degré p, peuvent s'écrire

$$x = \frac{a}{a'} + \sum \frac{A}{\lambda - \alpha}, \qquad y = \frac{k}{a'} + \sum \frac{B}{\lambda - \alpha}.$$

Transportons l'origine des coordonnées au point de coordonnées

$$x_1 = \frac{a}{a'}, \qquad y_1 = \frac{k}{a'}$$

et qui appartient à la courbe. Considérons les deux droites définies par les équations

$$\xi = \frac{A}{\lambda - \beta}, \qquad \eta = \frac{B}{\lambda - \alpha},$$

$$\xi' = \frac{A_1}{\lambda - \alpha}, \qquad \eta' = \frac{B_1}{\lambda - \beta},$$

si l'on prend sur chacune de ces droites un point correspondant à une valeur donnée de λ, on obtiendra deux points variables, et la droite qui joint ces deux points passera, quel que soit λ, par un point fixe P_1. A deux quelconques des racines α, β combinées entre elles correspondra un point fixe tel que P_1; on forme ainsi un système de p droites fixes passant par l'origine, et parallèles aux asymptotes de la courbe donnée; un polygone variable a chacun de ses sommets sur une de ces droites; la variation de ce polygone est déterminée par la condition que ses côtés et diagonales intérieures pivotent autour de pôles fixes; on prend le centre G des moyennes distances de ces sommets et l'on joint ce point au point O intersection des droites fixes; enfin on prend sur OG un point M tel que $\frac{OG}{OM} = \frac{1}{p}$; le point M décrit la courbe unicursale considérée. On peut donc énoncer le résultat suivant : si l'on considère dans un plan p droites fixes concourantes et $(p - 1)$ points fixes quelconques, la courbe unicursale la plus générale de l'ordre p est décrite par le centre des moyennes distances des sommets d'un polygone variable dont les sommets décrivent les droites pendant que $(p - 1)$ côtés consécutifs passent par les points fixes. Réciproquement,

étant donnée une courbe unicursale, il serait intéressant d'étudier la position des pôles fixes, leurs relations géométriques avec la courbe; mais les résultats ne paraissent pas assez simples pour être indiqués.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1886.

Composition de Mathématiques.

Voir, 3e série, t. V, p. 401.

Lavis.

Faire à l'encre de Chine et à *teintes plates* le lavis d'un cylindre couronné par un parallélépipède rectangle à base carrée, portant ombre sur lui.

Le fond restera blanc. Les ombres sont à 45° selon l'usage. Les traits pour le cadre, les arêtes ou les contours apparents seront faits à l'encre. Les contours des ombres seront indiqués par un trait de crayon très fin. On observera les filets de lumière.

Composition de Géométrie descriptive.

D'un cylindre de front supposé plein, limité par le plan horizontal et par une section droite, on enlève la portion située à l'intérieur d'un cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan vertical. Représenter par ses projections le solide ainsi obtenu, en indiquant les constructions pour déterminer la tangente en un point *quelconque* de l'intersection des deux surfaces.

La trace horizontale du cylindre est un cercle de $0^m,07$ de rayon dont le centre est à $0^m,08$ en avant de la ligne

de terre, et à $0^m,03$ à gauche de la ligne qui joint les milieux des petits côtés du cadre. Les génératrices sont inclinées à 45°, et l'on s'élève sur chacune d'elles en allant de gauche à droite. Le centre de la section droite qui limite le cylindre est à $0^m,15$ au-dessus du plan horizontal.

Le sommet du cône est à $0^m,05$ à droite du centre de la trace horizontale du cylindre, à $0^m,16$ en avant du plan vertical, et à $0^m,09$ au-dessus du plan horizontal. La génératrice horizontale du cône qui a sa trace verticale à gauche de celle de l'axe est contenue dans le plan tangent au cylindre, mené par le sommet du cône, qui laisse le cylindre à sa droite.

On fera passer la ligne de terre par les milieux des grands côtés du cadre.

Composition de Trigonométrie.

On donne dans un triangle deux côtés et l'angle compris :

$$a = 52835^m,47, \qquad b = 45607^m,05, \qquad C = 55°17'36'',25.$$

Calculer les deux angles A et B, le côté c, et la surface en hectares.

QUESTION.

1563. En chacun des points d'un ellipsoïde, on mène le plan tangent. On projette sur ce plan le diamètre issu du point de contact. Démontrer que ces projections, déjà tangentes à l'ellipsoïde, sont tangentes, en outre, à une seconde surface. (MANNHEIM.)

LEVY (**Maurice**), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France et à l'École centrale des Arts et Manufactures. — **La Statique graphique et ses applications aux constructions.** 2ᵉ édition. 4 vol. grand in-8 avec 4 atlas de même format :

Iʳᵉ PARTIE : *Principes et applications de la Statique graphique pure.* Grand in-8, de XXVIII-549 pages, avec Atlas de 26 planches; 1886... 22 fr.

IIᵉ PARTIE : *Flexion plane. — Lignes d'influence. — Poutres droites.* Grand in-8, de x-345 pages, avec Atlas de 6 planches; 1886...... 15 fr.

IIIᵉ PARTIE : *Arcs métalliques. — Ponts suspendus rigides. — Coupoles et corps de révolution.* Grand in-8 de IX-418 pages, avec Atlas de 8 pl.: 1887 .... 17 fr.

IVᵉ PARTIE : *Ouvrages de maçonnerie. — Systèmes réticulaires.* (*Sous pr.*)

JACQUET (**A.**), Ingénieur au corps des Mines, Professeur de Physique expérimentale et d'Électricité à l'École provinciale d'Industrie et des Mines du Hainaut. — **Cours de Physique industrielle** à l'usage des élèves des Écoles spéciales, contenant les *Applications de la chaleur aux usages industriels.*

Iʳᵉ PARTIE : *Combustion et combustibles. — Foyers. — Chaudières à vapeur.* 2 vol. in-4 autographiés, avec 769 figures dans le texte et un Atlas de 40 planches. Mons, E. Dacquin; 1886.................... 35 fr.

MARIE (**Maximilien**), Répétiteur de Mécanique et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Histoire des Sciences mathématiques et physiques.** Petit in-8, caractères elzévirs, titre en deux couleurs.

Tome I. — Première période : *De Thalès à Aristarque.* — Deuxième période : *D'Aristarque à Hipparque.* — Troisième période : *D'Hipparque à Diophante;* 1883................................ 6 fr.

Tome II. — Quatrième période : *De Diophante à Copernic.* — Cinquième période : *De Copernic à Viète;* 1883...................... 6 fr.

Tome III. — Sixième période : *De Viète à Kepler.* — Septième période : *De Kepler à Descartes;* 1883........................ 6 fr.

Tome IV. — Huitième période : *De Descartes à Cavalieri.* — Neuvième période : *De Cavalieri à Huygens;* 1884.................. 6 fr.

Tome V. — Dixième période : *De Huygens à Newton.* — Onzième période : *De Newton à Euler;* 1884.............................. 6 fr.

Tome VI. — Onzième période : *De Newton à Euler* (suite); 1885. 6 fr.

Tome VII. — Onzième période : *De Newton à Euler* (suite); 1885. 6 fr.

Tome VIII. — Onzième période : *De Newton à Euler* (fin). — Douzième période : *D'Euler à Lagrange;* 1886...................... 6 fr.

Tome IX. — Douzième période : *D'Euler à Lagrange* (fin). — Treizième période : *De Lagrange à Laplace;* 1886.................... 6 fr.

Tome X. — Treizième période : *De Lagrange à Laplace* (fin). — Quatorzième période : *De Laplace à Fourier;* 1887.............. 6 fr.

Tome XI. — Quinzième période : *De Fourier à Arago;* 1887... 6 fr.

Tome XII et dernier. — Seizième période : *D'Arago à Abel et aux Géomètres contemporains;* 1887........................ (*Sous presse.*)

TABLE DES MATIÈRES.

Avril 1887.

Paris. - Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

(Troisième Série.) — Mai 1887.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ PAR

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME SÉRIE.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

MAI 1887.

S'adresser, pour la rédaction, à M. GERONO, rue Hallé, 32 et 34, ou à M. BRISSE, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine).

(AFFRANCHIR.)

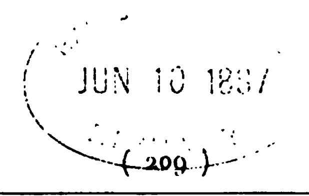
PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Par application de la loi du 7 avril 1879, tous les bureaux de poste de France, d'Algérie, de Belgique, de Danemark, d'Italie, de Norvège, les Pays-Bas, de Suède et de Suisse sont autorisés à recevoir les abonnements. L'éditeur des *Nouvelles Annales de Mathématiques* prend à sa charge la remise perçue par l'Administration, et il suffit de verser à un bureau de poste, sans frais supplémentaires, le montant de l'abonnement.



A MM. LES ABONNÉS
des « Nouvelles Annales de Mathématiques ».

Près d'un demi-siècle s'est écoulé depuis la fondation des *Nouvelles Annales*.

Pendant ce long espace de temps, j'ai consacré, avec l'aide de dévoués collaborateurs, tous mes soins, tous mes efforts à propager les meilleures méthodes d'enseignement, à susciter l'esprit de recherche et le goût des Mathématiques, à rendre, en un mot, ce Recueil utile aux professeurs et aux élèves.

Mais les années, qui s'accumulent, me condamnent au repos; et je suis obligé, malgré mes regrets, de renoncer à cette œuvre qui a été la préoccupation de ma vie.

M. E. Rouché, examinateur de sortie à l'École Polytechnique, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, dont les beaux travaux sont connus de tous, a consenti à me remplacer. Je lui en adresse ici tous mes remerciements.

C'est une grande consolation, en me retirant, de laisser la rédaction à M. E. Rouché et à M. Ch. Brisse, mon ancien et dévoué collaborateur. Je sais, en effet, que les *Nouvelles Annales* sont ainsi en bonnes mains.

J'ai vécu assez longtemps en communauté d'esprit avec mes nombreux lecteurs pour me permettre de leur dire adieu comme à d'anciens et bienveillants amis : c'est ce que je fais de tout mon cœur.

GERONO.

NOTE SUR LA MULTIPLICATION DE DEUX SÉRIES;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

Supposons qu'on ait deux séries convergentes

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$
$$t = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots.$$

Lorsque ces deux séries sont absolument convergentes, on sait que la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$ formée par les produits deux à deux de leurs termes, écrits dans un ordre quelconque, sera absolument convergente et égale à st (JORDAN, *Cours d'Analyse,* t. I, p. 110).

Dans la suite, nous supposons que la série

$$t = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

est absolument convergente; mais quant à la série

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

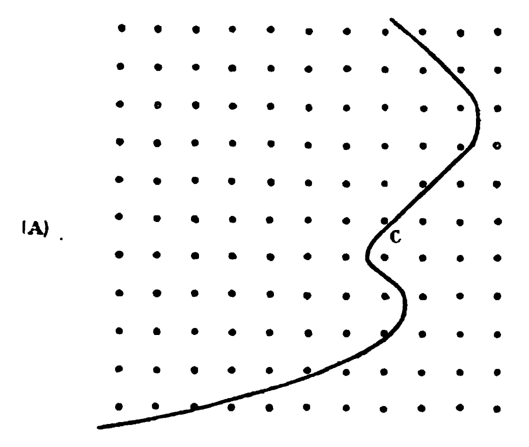
nous ne supposerons rien de plus que sa convergence.

Dans ces conditions, la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$ n'est plus nécessairement absolument convergente, et par conséquent il faudra préciser l'ordre dans lequel on effectue la sommation.

Écrivons pour cela les termes $u_\alpha v_\beta$ dans le Tableau suivant

$$\begin{array}{ccccc}
u_1 v_1, & u_2 v_1, & u_3 v_1, & u_4 v_1, & \ldots, \\
u_1 v_2, & u_2 v_2, & u_3 v_2, & u_4 v_2, & \ldots, \\
u_1 v_3, & u_2 v_3, & u_3 v_3, & u_4 v_3, & \ldots, \\
u_1 v_4, & u_2 v_4, & u_3 v_4, & u_4 v_4, & \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

ou, plus simplement, en indiquant les termes $u_\alpha v_\beta$ par des points



Traçons maintenant dans ce Tableau (A) une courbe C qui est coupée en un point seulement par une droite horizontale, et prenons la somme de tous les termes $u_\alpha v_\beta$ qui se trouvent du même côté de cette courbe que $u_1 v_1$.

Si maintenant la courbe C se déforme d'une manière quelconque en s'éloignant indéfiniment, mais à la condition d'avoir toujours une seule intersection avec une droite horizontale, nous aurons fixé par là l'ordre dans lequel on doit prendre les termes de la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$. Nous allons faire voir qu'on a alors

$$\Sigma u_\alpha v_\beta = st.$$

Soit L la limite supérieure des modules des sommes

$$\begin{array}{l} u_1, \\ u_1 + u_2, \\ u_1 + u_2 + u_3, \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

et ε_n la limite supérieure des modules des sommes

$$u_{n+1},$$
$$u_{n+1}+u_{n+2},$$
$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3},$$
$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+u_{n+4},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Alors L est finie et ε_n converge vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$, parce que la série $s = u_1 + u_2 + \dots$ est convergente.

Soit enfin η_n la limite supérieure des sommes

$$\operatorname{mod} v_{n+1},$$
$$\operatorname{mod} v_{n+1} + \operatorname{mod} v_{n+2},$$
$$\operatorname{mod} v_{n+1} + \operatorname{mod} v_{n+2} + \operatorname{mod} v_{n+3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Comme nous admettons que la série

$$T = \operatorname{mod} v_1 + \operatorname{mod} v_2 + \operatorname{mod} v_3 + \dots$$

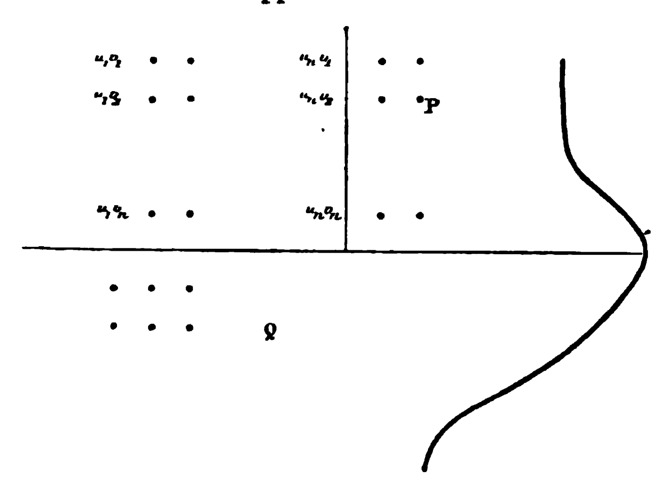
est convergente, η_n converge encore vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$.

Posons maintenant

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$
$$t_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n,$$

et prenons dans la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$ un nombre de termes assez grand pour y retrouver tous ceux du produit $s_n t_n$.

La courbe C enveloppera alors le carré



et, si nous prolongeons le côté horizontal inférieur jusqu'à l'intersection avec C, nous aurons

$$(\Sigma u_\alpha v_\beta)_C = s_n t_n + P + Q.$$

$$\begin{aligned}
P = {} & v_1 (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) \\
& + v_2 (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + v_n (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots), \\
Q = {} & v_{n+1} (u_1 + u_2 + u_2 + \ldots) \\
& + v_{n+2} (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots) \\
& + v_{n+3} (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on a évidemment

$$\begin{aligned}
& \operatorname{mod} P < \varepsilon_n (\operatorname{mod} v_1 + \operatorname{mod} v_2 + \ldots + v_n) < T \varepsilon_n, \\
& \operatorname{mod} Q < L \eta_n,
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, pour $n = \infty$,

$$\lim P = 0, \qquad \lim Q = 0,$$

et, par conséquent,

$$\Sigma u_\alpha v_\beta = \lim s_n t_n = st. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Applications.

I. Prenons les deux séries

$$(1)\qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

$$(2)\qquad g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots.$$

En ordonnant le produit suivant les puissances de z

$$(3)\qquad f(z)\,g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots,$$

les courbes C sont des droites inclinées de 45°.

Si les séries (1), (2) sont convergentes pour $z = R$ et que la convergence soit absolue pour l'une de ces deux séries, alors, d'après le théorème démontré, la série (3) sera également convergente pour $z = R$ et égale à

$$f(R)\,g(R).$$

II. Prenons les séries

$$F(s) = f(1) + \frac{f(2)}{2^s} + \frac{f(3)}{3^s} + \frac{f(4)}{4^s} + \ldots,$$

$$G(s) = g(1) + \frac{g(2)}{2^s} + \frac{g(3)}{3^s} + \frac{g(4)}{4^s} + \ldots.$$

En multipliant, on peut mettre le produit sous la forme

$$F(s)\,G(s) = h(1) + \frac{h(2)}{2^s} + \frac{h(3)}{3^s} + \frac{h(4)}{4^s} + \ldots,$$

en posant

$$h(n) = \Sigma f(d)\,g\left(\frac{n}{d}\right),$$

d parcourant tous les diviseurs de n. Les courbes C sont évidemment des hyperboles équilatères.

D'après notre proposition, lorsque la convergence de l'une des séries $F(s)$, $G(s)$ est absolue, alors la série

$$h(1) + \frac{h(2)}{2^s} + \frac{h(3)}{3^s} + \ldots$$

sera convergente et égale à $F(s)\,G(s)$.

Nous énoncerons encore la proposition suivante :

Supposons que les séries $F(s)$, $G(s)$ soient convergentes pour $s = \alpha$, elles seront encore convergentes pour $s > \alpha$. Si maintenant la convergence n'est pas absolue, on pourra cependant déterminer deux nombres positifs β, γ, tels que la série $F(s)$ soit absolument convergente pour $s = \alpha + \beta$, et la série $G(s)$ absolument convergente pour $s = \alpha + \gamma$.

Alors la série

$$h(1) + \frac{h(2)}{2^s} + \frac{h(3)}{3^s} + \ldots$$

est convergente et égale à $F(s)\,G(s)$ pour les valeurs de $s \geqq \alpha + \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma}$. Cette série est aussi convergente et égale à $F(s)\,G(s)$ pour $s \geqq \alpha + \frac{1}{2}$.

Lorsque β ou γ est égal à zéro, on retombe sur la proposition démontrée plus haut.

REMARQUES SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE;

PAR M. E. CESARO.

1. *Coordonnées d'inertie.* — Soient $A_1 A_2 A_3$ un triangle scalène (1), σ son aire, G son barycentre, x et y les coordonnées d'un point quelconque du plan, par rapport aux axes principaux d'inertie, issus de G. Ce sont les *coordonnées d'inertie* du point. En particulier, soient x_i

(1) Quelques-uns des résultats que nous allons obtenir sont en défaut dans le cas des triangles isoscèles : il serait facile d'examiner à part ce cas spécial.

et y_i les coordonnées de A_i. D'après un théorème connu (¹), les moments et le produit d'inertie d'un triangle, relativement à deux axes orthogonaux de son plan, sont les mêmes que si l'on concentrait l'aire du triangle en trois masses égales, appliquées aux milieux des côtés; par conséquent, si a et b sont les demi-axes de l'ellipse centrale d'inertie, et si l'on observe que les coordonnées du milieu du côté opposé à A_i sont $-\frac{x_i}{2}$ et $-\frac{y_i}{2}$, on a

$$(1) \qquad \sum x_i^2 = 12a^2, \qquad \sum y_i^2 = 12b^2,$$

$$(2) \qquad \sum x_i y_i = 0,$$

i devant toujours varier entre 1 et 3. On a, en outre,

$$(3) \qquad \sum x_i = 0, \qquad \sum y_i = 0.$$

2. Cela posé, les relations (2) et (3) donnent immédiatement

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{y_2-y_3}{x_1} = \dfrac{y_3-y_1}{x_2} = \dfrac{y_1-y_2}{x_3} = \dfrac{\sigma}{6a^2}, \\ \dfrac{x_2-x_3}{y_1} = \dfrac{x_3-x_1}{y_2} = \dfrac{x_1-x_2}{y_3} = -\dfrac{\sigma}{6b^2}, \end{cases}$$

pourvu que l'on tienne compte de (1) et de la formule connue

$$2\sigma = x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2).$$

Pour que les égalités (4) soient compatibles entre elles,

(¹) Voir une *Question proposée* par M. G. Cesàro, professeur à Liège, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. IV, p. 401, et t. V, p. 29).

il faut que l'on ait

(5) $$\sigma = 6ab\sqrt{3}.$$

Enfin il ne serait pas difficile de démontrer, au moyen des relations qui précèdent, une foule d'autres égalités, plus ou moins intéressantes, ayant toutes quelque importance dans l'étude du triangle. On trouve, par exemple, les relations

(6) $$\left\{\begin{array}{ll} \sum x_i^3 = 3x_1x_2x_3, & \sum x_i y_i^2 = -\dfrac{3b^2}{a^2}x_1x_2x_3, \\ \sum y_i^3 = 3y_1y_2y_3, & \sum x_i^2 y_i = -\dfrac{3a^2}{b^2}y_1y_2y_3, \end{array}\right.$$

que nous allons immédiatement employer dans une recherche particulière.

3. *Cercle circonscrit.* — Soient r, α, β le rayon et les coordonnées du centre du cercle circonscrit. On a

(7) $$r^2 = (\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2.$$

Multiplions d'abord cette équation par x_i, puis par y_i. Faisons ensuite $i = 1, 2, 3$, successivement. Par addition et en ayant égard à (6), nous trouvons

(8) $$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{8a^4}x_1x_2x_3, \qquad \beta = -\frac{a^2 - b^2}{8b^4}y_1y_2y_3.$$

Dès lors, les formules (6) deviennent

(9) $$\left\{\begin{array}{ll} \sum x_i^3 = \dfrac{24a^4\alpha}{a^2 - b^2}, & \sum y_i^3 = -\dfrac{24b^4\beta}{a^2 - b^2}, \\ \sum x_i^2 y_i = \dfrac{24a^2b^2\beta}{a^2 - b^2}, & \sum x_i y_i^2 = -\dfrac{24a^2b^2\alpha}{a^2 - b^2}. \end{array}\right.$$

Voici d'autres formules, qu'il serait facile de déduire de

(1), (2), (3) :

$$(10)\quad \begin{cases} \sum x_i^4 = 72a^4, \qquad \sum y_i^4 = 72b^4, \\ \sum x_i^2 y_i^2 = 24a^2b^2, \\ \sum x_i^3 y_i = \sum x_i y_i^3 = 0. \end{cases}$$

L'addition des égalités (7) donne

$$(11)\qquad r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 4(a^2 + b^2).$$

Si, avant d'ajouter, on multiplie chaque équation (7) par x_i^2 ou par y_i^2, on obtient, à cause de (10),

$$(12)\qquad a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)^2.$$

Par combinaison de (11) avec (12) on trouve,

$$(13)\qquad r^2 = \left(\frac{3a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\alpha\right)^2 + \left(\frac{a^2 + 3b^2}{a^2 - b^2}\beta\right)^2 \text{ (1)}.$$

4. *Ellipse de Steiner.* — L'équation générale des coniques, dont le centre est en G, est

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 1.$$

Écrivons que cette équation est vérifiée par les coordonnées de A_i. Multiplions d'abord par 1, puis par x_i, enfin par y_i, l'équation obtenue. On trouve, en faisant $i = 1, 2, 3$ et en ajoutant, les égalités

$$Aa^2 + Bb^2 = \tfrac{1}{4},$$

$$(Aa^2 - Bb^2)\alpha + 2Cb^2\beta = 0, \qquad (Aa^2 - Bb^2)\beta - 2Ca^2\alpha = 0.$$

---

(1) Si l'on compare ce résultat à l'un de ceux que nous avons obtenus dans l'article *Sur la droite de Simson*, on voit que le cercle générateur de l'hypocycloïde de Ferrers est égal au cercle des neuf points : on sait déjà que le cercle directeur, trois fois plus grand, est concentrique au même cercle.

pourvu que l'on ait égard aux formules (9). L'équation de l'ellipse de Steiner est donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 8.$$

Ainsi, les axes de l'ellipse de Steiner, que nous désignerons désormais par E, ne sont autres que les axes principaux d'inertie du triangle, relatifs au barycentre ([1]).

5. *Points de Steiner et de Tarry.* — La circonférence circonscrite rencontre E en quatre points, dont trois sont les sommets du triangle, et le quatrième, R, est le *point de Steiner*. Résolvons le système formé par les équations de E et du cercle circonscrit. Par élimination de y, on trouve une équation du quatrième degré en x. Il suffit de calculer les coefficients de x^3 et x^4 : leur rapport, changé de signe, représente, à cause de (3), l'abscisse de R. On trouve ainsi

$$(14) \qquad x = \frac{4a^2\alpha}{a^2 - b^2}, \qquad y = -\frac{4b^2\beta}{a^2 - b^2}.$$

Le *point de Tarry* est le point N, diamétralement opposé à R, sur la circonférence circonscrite. Ses coordonnées sont donc

$$(15) \qquad x = -2\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\alpha, \qquad y = 2\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\beta.$$

Il en résulte que, si l'on se donnait, dans un triangle, l'orthocentre, H, le barycentre et le point de Tarry, on

---

([1]) Les longueurs des demi-axes sont $2a\sqrt{2}$ et $2b\sqrt{2}$ et l'aire de l'ellipse est $8\pi ab$. Comme, d'autre part, l'ellipse E est, d'après un théorème d'Euler, la plus petite qu'on puisse circonscrire à un triangle, on voit, en vertu de (5), que le rapport de l'aire d'une ellipse à l'aire d'un triangle inscrit n'est jamais inférieur à $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

construirait fort aisément les axes de E : ceux-ci sont, en effet, les bissectrices de $\widehat{NGH}$.

6. La relation (12) conduit à poser

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a\sqrt{2}} \cos\varphi, \qquad \beta = \frac{a^2 - b^2}{b\sqrt{2}} \sin\varphi,$$

où φ représente toujours un angle aigu, pourvu que l'on dirige les axes de façon que les coordonnées α et β soient positives. On a, du reste, une interprétation simple de φ, en observant que les formules (14) deviennent

$$x = 2a\sqrt{2}\cos\varphi, \qquad y = -2b\sqrt{2}\sin\varphi.$$

L'anomalie excentrique de R est donc $-\varphi$. Si φ_i est l'anomalie excentrique de A_i, on a, en vertu de (8) et des formules fondamentales,

$$\begin{gathered} \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 = 0, \\ \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_1 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \tfrac{3}{4}, \\ \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 = -\tfrac{1}{4}\sin\varphi. \end{gathered}$$

Conséquemment ([1])

$$(16) \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi}{3}, \qquad \varphi_2 = \frac{\varphi + 2\pi}{3}, \qquad \varphi_3 = \frac{\varphi + 4\pi}{3}.$$

Les sommets du triangle et le point de Steiner sont donc *isolés* par les axes de E, de telle sorte que chaque quadrant renferme un de ces points et un seul. Nous voyons, en outre, à cause de (16), que les perpendiculaires abaissées sur le grand axe, par les sommets du triangle, rencontrent la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre en trois points, sommets d'un triangle équilatéral.

([1]) Voir, par exemple, le *Manuel des candidats*, etc., de M. Catalan (t. I, p. 262).

Soient p l'extrémité du demi grand axe positif, et p', p'' les points de rencontre de l'ellipse (deuxième et troisième quadrant), avec la perpendiculaire au grand axe, passant par le milieu du demi grand axe négatif.

Soient, de même, q l'extrémité du demi petit axe négatif, et q', q'' les points de rencontre de l'ellipse (deuxième et premier quadrant), avec la perpendiculaire au petit axe, passant par le milieu du demi petit axe positif. Les sommets A_1, A_2, A_3 doivent être situés, respectivement, sur les arcs pq'', $p'q'$, $p''q$. Si l'on donne l'ellipse E, on voit qu'il y a une infinité de triangles, inscrits à E, admettant pour point de Steiner un point situé sur un quadrant déterminé de E. Leurs positions extrêmes sont indiquées par les triangles isoscèles $pp'p''$, $qq'q''$. Tous ces triangles ont même aire, et ils sont circonscrits à une ellipse e, homothétique à E, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$. L'ellipse e touche chaque côté en son milieu. Si l'on fixe, sur E, la position de R, le triangle correspondant est défini, et le problème de sa détermination se confond avec celui de la trisection de l'angle φ.

7. *Relations entre les coordonnées d'inertie et les coordonnées barycentriques.* — On sait qu'un point quelconque du plan d'un triangle peut être considéré comme le centre de gravité de trois masses μ_1, μ_2, μ_3, dont la somme est 1, appliquées aux sommets du triangle : ces masses sont les *coordonnées barycentriques* du point. Il est évident que les *coordonnées d'inertie* sont données par les formules

$$x = \sum \mu_i x_i, \qquad y = \sum \mu_i y_i. \tag{17}$$

Inversement, si l'on demande de calculer les coordonnées barycentriques, connaissant les coordonnées d'inertie,

on doit remarquer, avant tout, que l'expression

$$\frac{x_i x_j}{a^2} + \frac{y_i y_j}{b^2}$$

est égale à 8 ou à — 4, suivant que i et j sont ou ne sont pas égaux entre eux. Cela posé, si l'on multiplie respectivement les équations (17) par $\frac{x_i}{a^2}$ et $\frac{y_i}{b^2}$, on obtient, en ajoutant,

$$(18) \qquad \mu_i = \frac{1}{12}\left(\frac{xx_i}{a^2} + \frac{yy_i}{b^2}\right) + \frac{1}{3}.$$

On donne souvent les coordonnées μ en fonction des côtés du triangle. Soit c_i le côté opposé à A_i. Il est clair, d'après (4), que l'on a

$$(19) \qquad c_i^2 = \frac{3b^2}{a^2}x_i^2 + \frac{3a^2}{b^2}y_i^2.$$

Inversement,

$$x_i^2 = \frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(8a^2 - \tfrac{1}{3}c_i^2\right), \qquad y_i^2 = \frac{b^2}{a^2 - b^2}\left(\tfrac{1}{3}c_i^2 - 8b^2\right).$$

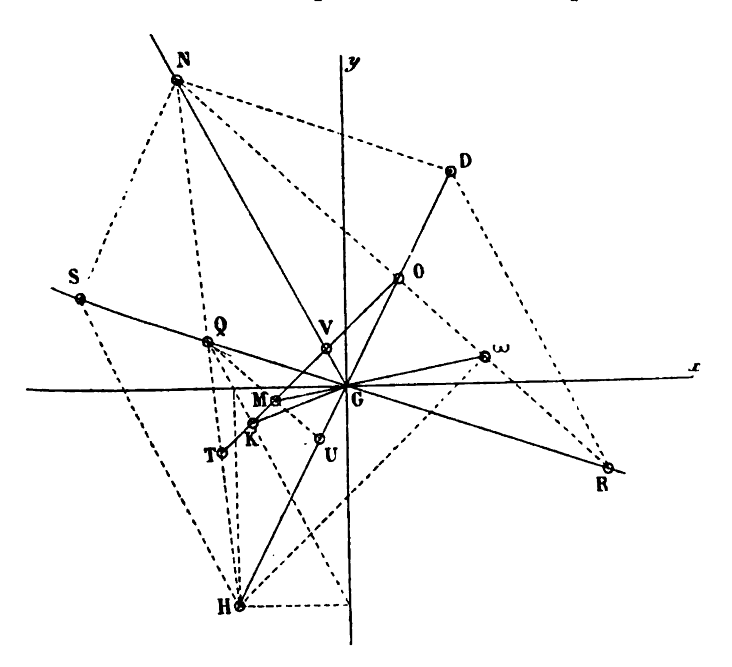
8. *Point de Lemoine.* — On appelle ainsi le point K, dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux carrés des côtés du triangle. D'après les formules (17) et (19), on a

$$(20) \qquad x = -\frac{2a^2\alpha}{a^2 + b^2}, \qquad y = -\frac{2b^2\beta}{a^2 + b^2}.$$

Si l'on observe que -2α et -2β sont les coordonnées de H, les équations (20) prouvent que les projections de l'orthocentre sur les axes sont en ligne droite avec le point de Lemoine. On voit donc qu'il est facile de construire les axes de E, connaissant les points G, H, K. Il suffit de décrire la circonférence sur le diamètre GH, et de joindre G aux extrémités du diamètre qui passe par K. Si l'on demande de tracer les axes de l'ellipse centrale

d'inertie d'une section triangulaire donnée, les développements qui précèdent fournissent une construction simple et directe. Il faudra commencer par construire les points G et H, ce qui n'offre aucune difficulté. Quant au point K, il y a plusieurs manières, très simples, de le déterminer. Par exemple, d'après Schlömilch, K est à l'intersection des droites joignant les milieux des côtés aux milieux des hauteurs correspondantes.

9. Les formules (14), (15), (20) mettent en évidence les nombreuses liaisons qui existent entre les points G,



H, K, R, N. On remarquera, avant tout, que le triangle HNR admet pour centre de gravité le point G : le milieu du côté NR est le centre O du cercle circonscrit au triangle fondamental; le milieu de NH est un autre

point remarquable, Q, appartenant, ainsi que le milieu de RH, à la circonférence des neuf points, relative au triangle fondamental. Rappelons que le centre U de cette circonférence est le milieu de OH. Enfin désignons par V le milieu de OK, centre du *cercle de Brocard*. Cela étant, remarquons encore que, connaissant les points G, H, K, on en déduit facilement les points R et N : ceux-ci sont, en effet, avec G et le point D, symétrique de H par rapport à G, les sommets d'un parallélogramme, dont les côtés sont antiparallèles à GH et à GK, relativement aux axes. Voici d'autres remarques, que l'on déduit immédiatement des formules (14), (15) et (20) :

1° Les droites GN et GH sont antiparallèles par rapport aux axes. Il en est de même de GR et GK, de HK et HN, de RN et OK.

2° Considérons les droites

GK,	GH,	GR,	GN,	RK,	RN,
GH,	HK,	GN,	HN,	RN,	KN;

désignons par Δ une quelconque des droites de la première ligne, et par Δ′ la droite qui lui correspond dans la seconde ligne. On peut affirmer que, dans l'ellipse de Steiner, les normales aux extrémités du diamètre parallèle à Δ sont parallèles à Δ′. Il en résulte, par exemple, que la normale en R à l'ellipse de Steiner est parallèle à GN : c'est donc RD. Ce théorème est dû à Steiner.

3° On peut trouver cinq nouveaux couples de points, appartenant à E : ils sont à l'intersection des parallèles à Δ avec les perpendiculaires à Δ′, passant par R et par le point S, symétrique de R relativement à G.

4° Le point V, centre du cercle de Brocard, est en ligne droite avec le barycentre et le point de Tarry. La distance OG est moyenne proportionnelle entre les distances de G à V et à N.

10. *Droites de Simson.* — Cherchons la relation qui doit exister entre p et θ pour que l'équation

$$x\sin\theta + y\cos\theta = p$$

représente une *droite de Simson*. Le côté opposé à A_i a pour équation

$$\frac{xx_i}{a^2} + \frac{yy_i}{b^2} = -1.$$

Qu'on lui élève la perpendiculaire par le point où il rencontre la droite considérée. On trouve que cette perpendiculaire est représentée par l'équation

$$(21)\quad \frac{yx_i}{a^2} - \frac{xy_i}{b^2} = -\frac{\left(\frac{x_i^2}{a^4} + \frac{y_i^2}{b^4}\right)p + 1\left(\frac{x_i}{a^2}\sin\theta + \frac{y_i}{b^2}\cos\theta\right)}{\frac{x_i}{a_2}\cos\theta - \frac{y_i}{b^2}\sin\theta}.$$

Soit, successivement, $i = 1, 2, 3$: on obtient par addition,

$$(22)\quad p\sum\frac{\frac{x_i^2}{a^4} + \frac{y_i^2}{b^4}}{\frac{x_i}{a^2}\cos\theta - \frac{y_i}{b^2}\sin\theta} = -1\sum\frac{\frac{x_i}{a^2}\sin\theta + \frac{y_i}{b^2}\cos\theta}{\frac{x_i}{a_2}\cos\theta - \frac{y_i}{b^2}\sin\theta}.$$

Après une suite de calculs, qui n'offrent aucune difficulté, pourvu que l'on ait soin de recourir constamment aux propriétés fondamentales des coordonnées d'inertie, on réduit l'équation (22) à la forme que voici :

$$(23)\quad \begin{cases} 2p = -(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) \\ \qquad + \frac{3a^2+b^2}{a^2-b^2}\alpha\sin 3\theta + \frac{a^2+3b^2}{a^2-b^2}\beta\cos 3\theta. \end{cases}$$

Pour interpréter cette relation, considérons deux rayons du cercle des neuf points, coïncidant primitivement avec la partie positive de l'axe des ordonnées, et tournant ensuite, autour de U, l'un vers la droite, l'autre vers la

gauche avec une vitesse triple. L'équation (23) exprime que la droite de Simson, perpendiculaire au premier rayon, et la perpendiculaire menée par Q au second rayon sont à égale distance du point U. On a ainsi le moyen de construire la droite de Simson, parallèle à une direction donnée. En particulier, les droites de Simson, parallèles aux axes, passent par le point Q. De même, on détermine aisément les points de rebroussement et les sommets de l'hypocycloïde de Ferrers; car, pour ces points, la distance de la droite de Simson au point U devient nulle ou maxima. Dès lors, si le deuxième des rayons, considérés plus haut, passe par le point Q, le premier rayon détermine, sur la circonférence, un des sommets : les deux autres sommets forment, avec le premier, un triangle équilatéral, inscrit à la circonférence des neuf points. Prolongeant en sens inverse les rayons ainsi obtenus, on détermine, sur la circonférence directrice, les trois points de rebroussement. Le rayon de courbure, en chaque sommet, est double de la distance de ce point au point de rebroussement opposé. D'autre faits géométriques sont renfermés dans la formule (23) : on les met bien facilement en évidence par les méthodes de la Géométrie intrinsèque, comme on l'a vu dans l'article *sur la droite de Simson.*

11. Si, avant d'ajouter les équations (21), on les multipliait par x_i et y_i, successivement, on obtiendrait les valeurs de x et y, c'est-à-dire des coordonnées du point, pour lequel la droite considérée est une droite de Simson. Mais, pour connaître ce point, nous n'avons besoin que d'une seule relation entre x et y, puisque nous savons déjà qu'il appartient nécessairement à la circonférence circonscrite. Chassons donc les dénominateurs de la formule (21), et multiplions les deux membres par $x_i y_i$:

soit ensuite $i = 1, 2, 3$. Il vient, par addition,

$$(24)\qquad x\cos\theta + y\sin\theta = \frac{4}{a^2 - b^2}(a^2\alpha\cos\theta - b^2\beta\sin\theta),$$

équation qui représente une droite, passant toujours par le point de Steiner. En outre, la direction antiparallèle à cette droite, par rapport aux axes, est perpendiculaire à la droite de Simson correspondante. Nous parvenons donc à la proposition que voici : la droite de Simson, relative à un point P, et la droite qui joint le point de Steiner au point P′, diamétralement opposé à P sur la circonférence circonscrite, sont antiparallèles par rapport aux axes de l'ellipse de Steiner. En particulier, les parallèles aux axes, passant par R, déterminent, sur la circonférence, les deux points pour lesquels les droites de Simson sont parallèles aux axes. De même, les quatre couples de directions antiparallèles, que nous avons signalés plus haut, donnent lieu à huit propositions particulières, telles que les suivantes :

1° La droite de Simson, relative au point de Steiner, est parallèle au diamètre du cercle circonscrit, qui passe par le point de Lemoine. Ce théorème est connu : il est dû à M. Boubals.

2° La parallèle à GR, menée par le point de Tarry, rencontre la circonférence en un point, pour lequel la droite de Simson est parallèle à GK.

3° Les droites de Simson, relatives aux projections du point de Steiner, sur les droites joignant le point de Tarry au barycentre et à l'orthocentre, sont respectivement parallèles aux droites qui joignent l'orthocentre au barycentre et au point de Lemoine.

12. *Digression sur la théorie des antiparallèles.* — Nous pouvons réduire ces résultats à une forme très

simple, au moyen de la théorie des antiparallèles, dont nous allons rappeler rapidement les principes, sans insister sur les démonstrations, extrêmement élementaires. Si, par les sommets d'un triangle, on mène les antiparallèles aux côtés opposés, relativement à une direction donnée, les trois droites ainsi obtenues concourent en un point ε de la circonférence circonscrite. Soit η un autre point de cette circonférence, tel que le rayon $O\eta$ soit parallèle à la direction considérée ([1]). Les points ε et η se poursuivent, sur la circonférence, la vitesse de ε étant quadruple de celle de η. Soit B_i le point où la parallèle menée par A_i au côté opposé rencontre la circonférence. Il est clair que, si η se trouve au milieu de l'arc A_iB_i, le point ε coïncide avec B_i. Cela étant, partageons l'arc A_iB_i, au point C_i, dans le rapport de 1 à 2. Il est évident, d'après ce que l'on vient de dire, que les points ε et η se confondent en chaque point C_i. Remarquons, en passant, que, d'après la dernière propriété, le triangle $C_1C_2C_3$ est nécessairement équilatéral. Ajoutons, pour finir, que toute conique circonscrite au quadrilatère $\varepsilon A_1A_2A_3$ a un axe parallèle à $O\eta$. Il en résulte que, si la direction de $O\eta$ est celle d'un axe de E, le point ε coïncide avec R.

13. La dernière remarque va nous permettre de simplifier considérablement les propositions obtenues pour les droites de Simson. P et P' étant deux points diamétralement opposés sur la circonférence circonscrite, nous avons vu que la droite de Simson, relative à P, est antiparallèle à RP', par rapport aux axes de E. Il est presque évident que cette propriété ne cesse

---

([1]) A chaque point ε correspondent, sur la circonférence, quatre points η, également espacés : nous n'en considérons qu'un seul.

d'être vraie si les axes de E tournent autour de l'origine, pourvu que le point R se déplace sur la circonférence avec une vitesse angulaire quatre fois plus grande. Donc, plus généralement, la droite de Simson, relative à P, est antiparallèle à $\varepsilon P'$, par rapport à $O\gamma_1$. Autrement : soient ε' et p les points de rencontre de la circonférence avec la parallèle et la perpendiculaire à $O\gamma_1$, menées respectivement par ε et par P. La droite de Simson, relative à P, est parallèle à $\varepsilon' p$.

Exemples. — 1° Si ε coïncide avec B_i, ε' n'est autre que A_i. Donc : la droite de Simson, relative à un point P, est parallèle aux droites qui joignent les sommets du triangle aux extrémités des cordes issues de P, et perpendiculaires aux côtés opposés.

2° Si ε coïncide avec C_i, il en est de même de ε' et de γ_1. Donc, pour obtenir la droite de Simson, relative à P, il suffit de mener, par ce point, la parallèle à OC_i, qui rencontre en p la circonférence. La droite demandée est la parallèle à pC_i, passant, en vertu d'une propriété connue, par le milieu de PH.

3° En particulier, si P est sur le diamètre perpendiculaire à OC_i, la droite correspondante est parallèle à PC_i : elle passe par le milieu de HC_i. Si P coïncide avec C_i, la droite correspondante est parallèle à OC_i : elle passe par le milieu de OH, c'est-à-dire par U. Nous voyons donc que C_1, C_2, C_3 sont précisément les points pour lesquels la droite de Simson contient le centre du cercle des neuf points. Remarquons, à ce propos, que l'on peut faire correspondre, point par point, la circonférence circonscrite et la circonférence des neuf points, en considérant, sur les deux lignes, les extrémités de deux rayons parallèles, dirigés en sens inverse. C'est ainsi que les points R, A_i, B_i, C_i correspondent respectivement au point Q, aux milieux des côtés du triangle fondamental, aux pieds

des hauteurs de ce triangle, et aux sommets de l'hypocycloïde de Ferrers. En général, tout point ε correspond au point de rencontre des droites de Simson parallèle et perpendiculaire à $O\tau_1$. Remarquons, en outre, que la droite joignant deux points correspondants passe par le barycentre, qui la divise dans le rapport de 2 à 1, et que le milieu de εH est diamétralement opposé, sur la circonférence des neuf points, au point qui correspond à ε. Tout cela tient à ce que les deux circonférences, dont il s'agit ici, admettent respectivement pour centres de similitude directe et inverse l'orthocentre et le barycentre.

14. *Coniques circonscrites, contenant le barycentre.* — Le procédé qui nous a servi pour trouver l'équation de E nous conduit à l'équation

$$(24)\left\{\begin{aligned} &Ax^2+By^2+2Cxy-4(Aa^2+Bb^2)\\ &\quad=\frac{2}{a^2-b^2}[(Aa^2-Bb^2)(\alpha x+\beta y)+2C(b^2\beta x-a^2\alpha y)],\end{aligned}\right.$$

qui représente toute conique circonscrite au triangle fondamental. Si l'on veut que la conique passe par le barycentre, on doit poser

$$Aa^2+Bb^2=0.$$

Pour satisfaire à cette équation, on peut prendre

$$A=B=0,$$

et alors l'équation (24) devient

$$(25)\qquad xy=\frac{2}{a^2-b^2}(b^2\beta x-a^2\alpha y).$$

Mais, plus généralement, nous pouvons faire

$$A=\frac{1}{a^2},\qquad B=-\frac{1}{b^2},\qquad C=\frac{\cot\frac{\lambda}{2}}{ab}.$$

Ces coniques sont donc nécessairement des hyperboles, dont les asymptotes font entre elles un angle V, déterminé par la relation

$$(26) \qquad \operatorname{tang} \tau = \operatorname{tang} V \sin \frac{\lambda}{2},$$

τ étant l'angle des diagonales du rectangle formé par les tangentes aux sommets de E. On démontre aisément que les centres de toutes ces hyperboles sont sur l'ellipse e, qui touche les côtés du triangle en leurs milieux. On peut faire voir, en outre, que λ représente l'angle que le rayon déterminant l'anomalie excentrique du centre de l'hyperbole fait avec le rayon analogue, relatif au point Q. D'après (26), pour avoir $V = \frac{\pi}{2}$, il faut que $\lambda = 0$. Parmi les hyperboles considérées, il y en a donc une seule équilatère : elle a pour centre le point Q. A mesure que le centre de l'hyperbole s'éloigne de Q, sur e, les asymptotes se rapprochent, mais leur angle ne peut devenir inférieur à τ : il atteint ce minimum pour $\lambda = \pi$, c'est-à-dire lorsque le centre de l'hyperbole est au milieu de GR. Cette conique particulière passe évidemment par le point de Steiner. Ses axes sont donc parallèles à ceux de E, et ses asymptotes sont parallèles aux diagonales du rectangle formé par les tangentes aux sommets de E.

15. *Hyperbole de Kiepert.* — On appelle ainsi l'hyperbole équilatère circonscrite, qui passe par le centre de gravité. Nous venons de voir que (25) est l'équation de cette courbe, et que son centre est le point Q. En outre, d'après (25), les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux axes de E. Comme toute hyperbole équilatère circonscrite, elle passe par H : c'est ce que l'on vérifie au moyen de (25). Elle passe donc aussi par

le symétrique de H, par rapport à Q, c'est-à-dire par le point de Tarry. Elle contient, enfin, le symétrique de G, par rapport à Q, c'est-à-dire le point S, diamétralement opposé à R, sur E. Quelques-unes de ces propriétés peuvent être aisément généralisées par la théorie des antiparallèles. On trouve que l'hyperbole équilatère circonscrite, dont une asymptote est parallèle à $O\eta$, a pour centre le point qui correspond à ε sur la circonférence des neuf points : elle passe, en outre, par le point diamétralement opposé à ε, sur la circonférence circonscrite. Ainsi, par exemple, toute hyperbole équilatère circonscrite, ayant pour centre un sommet de l'hypocycloïde de Ferrers, a une asymptote parallèle à OC_i, et passe par le point diamétralement opposé à C_i sur la circonférence circonscrite.

16. On sait que la tangente en un point quelconque d'une hyperbole équilatère est antiparallèle au rayon vecteur issu du centre, par rapport aux asymptotes. Dans le cas actuel, en tenant compte de quelques remarques précédentes, nous voyons que les tangentes en G et en H sont respectivement antiparallèles à GR et à NH : ce sont donc les droites GK et HK. Conséquemment, les droites qui touchent l'hyperbole de Kiepert, au barycentre et à l'orthocentre, se coupent au point de Lemoine. De même, aux extrémités du diamètre que l'hyperbole a en commun avec le cercle des neuf points, les tangentes sont parallèles au diamètre OK du cercle de Brocard, etc.

17. On sait [1] que les quatre projections d'un point

---

[1] Voir, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. VI, p. 241), l'article de M. Neuberg *Sur les normales à l'ellipse*.

P sur une ellipse E appartiennent à une hyperbole équilatère, qui contient, en outre, les points P et G, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de E. D'après cela, si le point P est l'orthocentre H, il est clair que l'hyperbole correspondante n'est autre que l'hyperbole de Kiepert : les projections de H sur E sont S, A_1, A_2, A_3. On pourrait étudier, en général, les liaisons existant entre le point P et le centre P_0 de l'hyperbole correspondante. On trouve sans peine que, si GP_0 est parallèle ou antiparallèle à une droite Δ, la droite GP est respectivement antiparallèle ou parallèle à Δ'. Ainsi, par exemple, on peut donner à ces droites les directions que voici :

(GP_0)..... GK, GN, GR, GH, RK, OK;
(GP)...... GN, HK, GH, HN, OK, NK.

Pour pouvoir déterminer complètement un des points P, P_0, connaissant l'autre, il faut encore observer que la direction PP_0 se déduit de GP, comme celle-ci a été déduite de GP_0. Cela nous permet, par exemple, de donner à ces droites les directions suivantes :

(GP_0)..... GK, GR, RK;
(GP)...... GN, GH, OK;
(PP_0)..... HK, HN, NK.

Ainsi, lorsque P_0 coïncide successivement avec K, Q, le milieu de QR, le milieu de GR, etc., P coïncide avec le symétrique de H, relativement à K, ou avec les points H, O, D, etc. Ajoutons que le point P_0 est toujours en ligne droite avec les projections de P sur les axes. Revenons au cas de P et P_0 coïncidant avec H et Q. L'équation (25), mise sous la forme

$$\frac{y}{x}\,\frac{x+2\alpha}{y+2\beta}=\frac{b^2}{a^2},$$

montre que les parallèles à Δ et Δ', menées respectivement par G et H, concourent sur l'hyperbole de Kiepert. Si nous employons les six couples de directions Δ, Δ', signalés plus haut, les quatre premiers nous conduisent aux points connus G, H, S, N, et les deux derniers nous donnent deux nouveaux points de l'hyperbole de Kiepert. Tout point, P, de cette ligne est le milieu d'un segment intercepté, par les axes de E, sur une droite issue de S. Le symétrique, par rapport à G, du milieu de GP, est le centre d'une conique circonscrite à $RA_1A_2A_3$.

18. *Autres points remarquables.* — Nous allons calculer les coordonnées d'inertie des principaux points qu'il y a lieu de considérer dans le triangle :

1° Nous avons vu qu'un certain point F, appartenant à l'hyperbole de Kiepert, se trouve à l'intersection des parallèles à RK et RN, menées respectivement par les points G et H. Les coordonnées d'inertie de F sont

$$x = -\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,\frac{8a^2\alpha}{a^2+3b^2}, \qquad y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,\frac{8b^2\beta}{3a^2+b^2}.$$

2° L'intersection de RN avec la parallèle à OK, passant par H, est un autre point remarquable, ω, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{4a^2\alpha}{a^2+3b^2}, \qquad y = \frac{4b^2\beta}{3a^2+b^2}.$$

Ce point appartient aussi à l'hyperbole de Kiepert : il est diamétralement opposé à F, sur cette conique. En d'autres termes, ω est le symétrique de F, par rapport à Q. Les directions $G\omega$ et GF sont évidemment antiparallèles par rapport aux axes. Il en est de même des directions NF et NR. La figure $NF\omega H$ est un parallélogramme. Les droites $G\omega$, OK fournissent un nouveau couple de directions Δ, Δ'. Enfin, on démontre aisément que ω est

le point dont les coordonnées barycentriques sont inversement proportionnelles aux carrés des côtés.

3° Les droites Gω, OK, UQ concourent en un point M, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{2a^2\alpha}{a^2+3b^2}, \qquad y = -\frac{2b^2\beta}{3a^2+b^2}.$$

Ce point est évidemment symétrique du milieu de Gω, par rapport à G.

4° L'intersection de OK avec HN est un point T, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{2(3a^2+5b^2)a^2\alpha}{3a^4+2a^2b^2+3b^4}, \qquad y = -\frac{2(5a^2+3b^2)b^2\beta}{3a^4+2a^2b^2+3b^4}.$$

Les coordonnées barycentriques de ce point sont proportionnelles aux quatrièmes puissances des côtés.

5° Les droites GT, Kω, VH concourent en un point L, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{4a^2\alpha}{5a^2+3b^2}, \qquad y = -\frac{4b^2\beta}{3a^2+5b^2}.$$

Ce point appartient à l'hyperbole de Kiepert.

6° Les droites OL, HM, NK concourent en un point W, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{2(a^2+b^2)\alpha}{a^2+3b^2}, \qquad y = -\frac{2(a^2+b^2)\beta}{3a^2+b^2}.$$

Les droites GW, OK sont parallèles. Le point W appartient à l'hyperbole de Kiepert : il est diamétralement opposé, sur cette conique, au point de rencontre des parallèles à RN et KN, menées respectivement par G et H.

7° Les droites GH, ML, Tω concourent en un point Z, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{16a^2b^2\alpha}{9a^4+14a^2b^2+9b^4}, \qquad y = -\frac{16a^2b^2\beta}{9a^4+14a^2b^2+9b^4}.$$

La parallèle à RN, menée par le symétrique du milieu de GZ, relativement à G, passe par le point de rencontre des droites GN, $Q\omega$.

8° Les droites GK, ML, VW concourent en un même point, dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{8(a^2+b^2)a^2\alpha}{7a^4+18a^2b^2+7b^4}, \qquad y = -\frac{8(a^2+b^2)b^2\beta}{7a^4+18a^2b^2+7b^4}.$$

9° Tous ces points ont été considérés par M. Brocard ([1]). Un autre point remarquable est le point J, d'où l'on voit les côtés du triangle sous des angles égaux. Ses coordonnées sont

$$x = -\frac{2a\alpha}{a+b}, \qquad y = -\frac{2b\beta}{a+b}.$$

Il existe, dans le plan du triangle, un point I, d'où l'on voit les côtés du triangle sous des angles de 60°. Ses coordonnées sont

$$x = -\frac{2a\alpha}{a-b}, \qquad y = \frac{2b\beta}{a-b}.$$

Les points I et J sont les *centres isogones* du triangle ([2]). Au moyen de (25), on vérifie sans peine que ces points sont diamétralement opposés sur l'hyperbole de Kiepert. Le diamètre qui les joint passe évidemment par le point de Lemoine, et les tangentes à l'hyperbole, en I et J, sont parallèles à GH. Les droites GI, GJ sont antiparallèles, par rapport aux axes de E. Enfin, le rayon GJ est celui qui détermine l'anomalie excentrique du point de Steiner.

19. *Cercle et points de Brocard.* — Le cercle de Brocard a pour équation

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)+(a^2-b^2)(\alpha x-\beta y) = (a^2-b^2)^2.$$

([1]) *Nouvelles propriétés du triangle* (Congrès de Rouen, 1883).

([2]) NEUBERG, *Mémoire sur le tétraèdre*, p. 37.

En s'aidant des formules (12) et (13), on trouve que son diamètre est

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} r :$$

telle est la longueur de OK. Les centres de similitude du cercle de Brocard et du cercle circonscrit sont situés sur les axes de E. Il en est de même des centres de similitude du cercle de Brocard et du cercle des neuf points. La perpendiculaire à OK, passant par M, rencontre la circonférence de Brocard en deux points, ω', ω'', qu'on appelle *points de Brocard*. Les coordonnées de ces points sont

$$x = -\frac{2a^2\alpha}{a^2+3b^2} \pm \frac{2ab\beta\sqrt{3}}{3a^2+b^2}, \qquad y = -\frac{2b^2\beta}{3a^2+b^2} \mp \frac{2ab\alpha\sqrt{3}}{a^2+3b^2}.$$

Le pôle de la corde $\omega'\omega''$ n'est autre que le point T. L'angle sous lequel cette corde est vue du centre ne dépasse jamais 120°. On démontre, en effet, que le cosinus de la moitié de l'angle en question est

$$\frac{a^2}{a^2+3b^2} + \frac{b^2}{3a^2+b^2} > \frac{1}{2}.$$

Il est évident que le triangle $\omega\omega'\omega''$ admet même barycentre que le triangle fondamental. En outre, si l'on pose

$$\frac{4a^2\alpha}{a^2+3b^2} = 2ma\sqrt{2}\cos\lambda, \qquad \frac{4b^2\beta}{3a^2+b^2} = 2mb\sqrt{2}\sin\lambda,$$

les coordonnées des points de Brocard deviennent

$$2ma\sqrt{2}\cos\left(\lambda \pm \frac{2\pi}{3}\right), \quad 2mb\sqrt{2}\sin\left(\lambda \pm \frac{2\pi}{3}\right).$$

Il en résulte que le triangle $\omega\omega'\omega''$ est inscrit à une ellipse homothétique à E : les perpendiculaires abaissées sur le grand axe, par les sommets du triangle, rencontrent

la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre en trois points, sommets d'un triangle équilatéral. Cela tient à ce que le triangle $\omega\omega'\omega''$ a mêmes axes principaux d'inertie que le triangle fondamental.

20. *Triangle de Brocard.* — Les perpendiculaires aux côtés de $A_1A_2A_3$, menées par O, rencontrent la circonférence de Brocard en trois points, sommets du *premier triangle de Brocard*. Les coordonnées de ces points sont

$$-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\frac{x_i}{2}, \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\frac{y_i}{2}.$$

Il en résulte que, après une dilatation convenable autour du barycentre, le triangle de Brocard devient symétrique, par rapport à Gy, du triangle fondamental. Cette remarque a déjà été faite ([1]). Le triangle de Brocard a donc même barycentre et mêmes axes principaux d'inertie que le triangle fondamental, et tout point remarquable p de son plan se déduit du point P, qui joue le même rôle dans le triangle fondamental, en cherchant le symétrique P' de P, par rapport à Gy, et en réduisant GP' dans le rapport

$$(27) \qquad \frac{Gp}{GP'} = \frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

D'après cela, le point de Steiner du triangle de Brocard n'est autre que le point de Lemoine du triangle fondamental. Cette propriété est connue ([2]). De même, le point de Tarry est O; le point de Lemoine se trouve à l'intersection de GR avec la parallèle à RN, menée par

---

([1]) Brocard, *Étude d'un nouveau cercle sur le plan d'un triangle* (Congrès d'Alger, 1881).

([2]) Neuberg, *Sur le point de Steiner* (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1886).

V; l'orthocentre est à l'intersection des droites GN et $H\omega$; le point ω est à l'intersection de GF avec OK; le point F ne diffère pas du point ω, relatif au triangle fondamental; ce dernier point est donc commun aux hyperboles de Kiepert des deux triangles; etc., etc. Si l'on joint les sommets du triangle de Brocard aux sommets et aux milieux des côtés du triangle fondamental, on obtient six droites, qui concourent aux points ω et O. De même, d'après Stoll, si l'on joint les milieux des côtés du triangle de Brocard aux sommets et aux milieux des côtés du triangle fondamental, on obtient six droites, qui concourent aux points L et M. Enfin, remarquons que le triangle de Brocard est homothétique au triangle fondamental, relativement au barycentre commun : le rapport d'homothétie est le carré du rapport (27).

21. *Transformations.* — On sait que ω' et ω'' sont *conjugués isogonaux*, ce qui revient à dire qu'ils sont les foyers d'une conique inscrite au triangle. Il en est de même des points O et H, G et K, L et M, ω et T, V et W. Les conjugués isogonaux de I et J sont deux autres points remarquables, que M. Neuberg a nommés *centres isodynamiques* du triangle. Une autre transformation importante est celle par points *conjugués isotomiques*, consistant en ce que les deux points, qui se correspondent, ont leurs coordonnées barycentriques, de même nom, inverses l'une de l'autre. Ainsi, par exemple, les point K et ω sont conjugués isotomiques. Soit, en général, P' le conjugué isotomique de P. On trouve aisément, au moyen de (18), que les coordonnées barycentriques de P' sont données par la formule

$$\mu'_i = \frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2-\frac{1}{6}\left(\frac{xx_i}{a^2}+\frac{yy_i}{b^2}-2\right)^2}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-8};$$

puis, au moyen de (17), on voit que les coordonnées d'inertie de P′ sont

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= 4\,\frac{2x - \dfrac{a^2\alpha}{a^2-b^2}\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right) - \dfrac{2\beta xy}{a^2-b^2}}{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-8}, \\ y' &= 4\,\frac{2y - \dfrac{b^2\beta}{a^2-b^2}\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right) + \dfrac{2\alpha xy}{a^2-b^2}}{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-8}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on introduit, comme plus haut, l'anomalie excentrique de R, et que l'on pose

$$\frac{x}{2a\sqrt{2}} = m\cos\lambda, \qquad \frac{y}{2b\sqrt{2}} = m\sin\lambda,$$

on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{x'}{2a\sqrt{2}} &= \frac{m}{m^2-1}\left[\cos\lambda - m\cos(\varphi-2\lambda)\right], \\ \frac{y'}{2b\sqrt{2}} &= \frac{m}{m^2-1}\left[\sin\lambda - m\sin(\varphi-2\lambda)\right]. \end{aligned} \right.$$

En particulier, si $\lambda = \frac{\varphi}{3}$, on a

$$\frac{x'}{2a\sqrt{2}} = -\frac{m}{m+1}\cos\frac{\varphi}{3}, \qquad \frac{y'}{2b\sqrt{2}} = -\frac{m}{m+1}\sin\frac{\varphi}{3}.$$

Il en résulte que, si P est sur une médiane, il en est de même de P′. Ces deux points sont alors conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes de la médiane. Si P est sur E, P′ est rejeté à l'infini, suivant une direction dont le coefficient angulaire est

$$\frac{y'}{x'} = \frac{b}{a}\cot\frac{\lambda-\varphi}{2}.$$

En particulier, si $\lambda = -\varphi$, c'est-à-dire si P coïncide

avec R, P′ est à l'infini, sur la direction perpendiculaire à GH, etc.

22. De la transformation par *polarité trilinéaire* ([1]) nous déduisons une transformation nouvelle, étroitement liée à celle qui précède. Lorsqu'un point parcourt une conique circonscrite au triangle, sa polaire trilinéaire pivote autour d'un point π, *pôle d'homologie* de la conique considérée. Soit π' le centre de la conique. Il y a réciprocité entre les points π et π'; car, si μ_i et μ'_i sont les coordonnées barycentriques de ces points, on démontre que

$$(29) \qquad \mu_2\mu'_3 + \mu_3\mu'_2 = \mu_3\mu'_1 + \mu_1\mu'_3 = \mu_1\mu'_2 + \mu_2\mu'_1.$$

Or, identiquement,

$$\mu_2\mu'_3 + \mu_3\mu'_2 = \tfrac{1}{2}(1 - 2\mu_1)(1 - 2\mu'_1) + \tfrac{1}{2} - \sum \mu_i\mu'_i.$$

Les conditions (29) reviennent donc à dire que le produit $(1 - 2\mu_i)(1 - 2\mu'_i)$ ne dépend pas de i. Conséquemment, pour obtenir un couple de points π, π', il suffit de prendre deux points P, P′, conjugués isotomiques, et les points demandés sont les symétriques, par rapport à G, des milieux de GP et GP′. En particulier, on peut supposer que π et π' soient deux points, divisant harmoniquement un des segments GA_i. Si π coïncide avec O, π' n'est autre que K; si π se meut sur une droite passant par K, π' décrit une hyperbole équilatère, contenant O; si π parcourt l'ellipse e ou la circonférence des neuf points, π' est à l'infini ou bien sur la polaire trilinéaire de H, qui est l'axe radical du cercle circonscrit et du

([1]) Mathieu, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1865.

cercle des neufs points; etc. Les formules de transformation se déduisent des formules (28) en y remplaçant $x, y, \ldots$ par $-2x, -2y, \ldots$.

23. Il y aurait à étudier plus généralement, les transformations quadratiques réversibles, que l'on obtient en cherchant toutes les formes quadratiques, telles qu'une même forme des coordonnées barycentriques d'un point représente les coordonnées barycentriques de son conjugué, et réciproquement, abstraction faite d'un facteur indépendant de i. C'est ainsi, par exemple, que si l'on pose

$$\frac{\mu_1^2 - \mu_2\mu_3}{\mu'_1} = \frac{\mu_2^2 - \mu_3\mu_1}{\mu'_2} = \frac{\mu_3^2 - \mu_1\mu_2}{\mu'_3} = \mu,$$

on en déduit

$$\frac{\mu_1'^2 - \mu'_2\mu'_3}{\mu_1} = \frac{\mu_2'^2 - \mu'_3\mu'_1}{\mu_2} = \frac{\mu_3'^2 - \mu'_1\mu'_2}{\mu_3} = \mu',$$

où

$$\mu = 1 - 3(\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2),$$
$$\mu' = 1 - 3(\mu'_2\mu'_3 + \mu'_3\mu'_1 + \mu'_1\mu'_2),$$

et l'on démontre que

$$\mu\mu' = 1, \qquad \sum \mu_i\mu'_i = 1, \qquad \ldots.$$

Comme précédemment, les médianes se transforment en elles-mêmes, de telle sorte que deux points conjugués, situés sur GA_i, sont séparés harmoniquement par A_i et par le symétrique de ce point, relativement à G. La question générale, que nous venons de poser, est susceptible d'une intéressante interprétation géométrique, et d'un développement considérable.

SUR LES SÉRIES;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Si l'on a une série à termes positifs

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

cette série sera divergente si l'on peut trouver une fonction $\varphi(n)$, telle que $u_n \varphi(n)$ ait pour limite une quantité λ différente de zéro, la fonction $\varphi(n)$ remplissant en outre la condition que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit une série divergente.

La série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

sera au contraire convergente, si l'on peut trouver une fonction $\varphi(n)$, telle que $u_n \varphi(n)$ ait pour limite une quantité finie λ, et telle que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit convergente.

Dans le premier cas, $u_n \varphi(n)$ peut croître au delà de toute limite; dans le second cas, λ peut avoir pour limite zéro : le théorème est encore vrai; la démonstration que nous allons en donner le montre d'une manière évidente.

2. Supposons d'abord que $u_n \varphi(n)$ n'ait pas pour limite zéro, et que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit divergente.

On pourra toujours trouver un nombre μ supérieur à zéro, tel que, pour une certaine valeur de n et pour toute valeur plus grande, $u_n \varphi(n)$ soit plus grand que μ;

on aura donc, à partir de cette valeur,

$$u_n \varphi(n) > \mu,$$
$$u_{n+1} \varphi(n+1) > \mu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_{n+p} \varphi(n+p) > \mu;$$

par suite,

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}$$
$$> \mu \left[\frac{1}{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n+1)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n+p)} \right];$$

la quantité entre parenthèses augmente indéfiniment quand p croît lui-même indéfiniment; par suite,

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} + \ldots$$

est divergente.

On sait que la série harmonique est divergente; on en conclut que les séries $\sum \frac{f(n)}{F(n)}$, où le degré du dénominateur ne surpasse pas de plus d'une unité celui du numérateur, sont des séries divergentes; dans ce cas, $\varphi(n) = n$ et $n \frac{f(n)}{F(n)}$, dans les hypothèses faites, est une fonction qui, pour n infini, a pour limite une quantité finie, ou augmente indéfiniment : la série $\sum \frac{f(n)}{F(n)}$ est donc divergente.

Il en est de même des séries $\sum \frac{1}{(Ln)^\mu}$; en posant $u_n = \frac{1}{(Ln)^\mu}$, la fonction nu_n croît au delà de toute limite quand n augmente indéfiniment.

3. Supposons maintenant que $u_n \varphi(n)$ ait pour limite une quantité finie λ ou bien zéro, mais que $\varphi(n)$ soit une fonction telle que $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit une série convergente; la série proposée $\sum u_n$ sera aussi convergente.

En effet, si $u_n \varphi(n)$ a pour limite une quantité λ ou zéro, on pourra toujours trouver une valeur μ supérieure à λ, mais finie, et telle que, pour une valeur de n suffisamment grande, et pour toute valeur plus grande de n, le produit $u_n \varphi(n)$ soit inférieur à μ; on aura donc

$$\begin{gathered} u_n \varphi(n) < \mu, \\ u_{n+1} \varphi(n+1) < \mu, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ u_{n+p} \varphi(n+p) < \mu; \end{gathered}$$

on en tire

$$\begin{aligned} & u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} \\ & \quad < \mu\left[\frac{1}{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n+1)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n+p)}\right]. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est une série convergente, $\sum u_n$ sera donc aussi une série convergente.

On démontre que la série $\sum \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ est convergente pour toute valeur positive de α, quelque petite que soit d'ailleurs la quantité α; par suite, les séries $\sum \frac{f(n)}{F(n)}$, dans lesquelles le degré du dénominateur surpasse de plus d'une unité celui du numérateur, sont convergentes.

On peut trouver une infinité de fonctions $\varphi(n)$ dont l'ordre de grandeur est compris entre celui de n et celui de $n^{1+\alpha}$, α étant une quantité positive non nulle, et qui jouissent de la propriété de fournir des séries $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ divergentes ou convergentes.

En prenant pour $\varphi(n)$ les fonctions

$$n \mathrm{L} n, \quad n \mathrm{L} n \mathrm{LL} n, \quad \ldots,$$

les séries $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ sont divergentes; les fonctions

$$n(\mathrm{L}n)^\mu, \quad n\mathrm{L}n(\mathrm{LL}n)^\mu, \quad \ldots,$$

où $\mu > 1$, donnent, au contraire, des séries $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ qui sont convergentes.

L'ordre de grandeur de ces fonctions va en se rapprochant de plus en plus; mais Abel a démontré qu'il n'existe pas de fonction $\varphi(n)$ intermédiaire entre elles, et telle que, si $u_n \varphi(n)$ a pour limite zéro, la série $\sum u_n$ soit convergente, et si $u_n \varphi(n)$ n'a pas pour limite zéro, la série $\sum u_n$ soit divergente.

S'il était possible de trouver facilement la limite des produits

$$u_n . n\mathrm{L}n, \quad u_n . n\mathrm{L}n\mathrm{LL}n, \quad \ldots, \quad u_n n(\mathrm{L}n)^\mu, \quad \ldots,$$

on pourrait mettre en évidence la divergence ou la convergence d'un grand nombre de séries à termes positifs; malheureusement cette limite n'est pas, en général, aisée à trouver. Prenons quelques exemples.

4. Soit la série $\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{L}\left[1 + \frac{1}{\varphi(n)}\right]$, où L désigne un logarithme népérien, et $\varphi(n)$ une fonction qui augmente indéfiniment avec n; nous aurons

$$u_n \varphi(n) = \mathrm{L}\left[1 + \frac{1}{\varphi(n)}\right]^{\varphi(n)}$$

et, par suite,

$$\lim u_n \varphi(n) = \mathrm{L}e$$

ou

$$\lim u_n \varphi(n) = 1.$$

Si donc la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est convergente, la proposée

l'est aussi; si $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est divergente, la proposée est divergente.

Ce qui précède nous permet de trouver les conditions dans lesquelles un produit infini de la forme

$$(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

est convergent ou divergent.

Considérons, à cet effet, la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{L}\left[1+\frac{1}{\varphi(n)}\right],$$

et posons, pour abréger,

$$\frac{1}{\varphi(n)} = \alpha_n.$$

On aura

$$u_0+u_1+\ldots+u_n = \mathrm{L}(1+\alpha_0)+\mathrm{L}(1+\alpha_1)+\ldots+\mathrm{L}(1+\alpha_n)$$

ou

$$u_0+u_1+\ldots+u_n = \mathrm{L}(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n).$$

Mais nous avons vu que le second membre tend vers une limite finie quand n augmente indéfiniment, si la série $\sum \alpha_n$ est convergente; par suite, le produit

$$(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

tend lui-même vers une limite finie, si la série $\sum \alpha_n$ est convergente. Le logarithme de

$$(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

augmente au contraire au delà de toute limite, si la série $\sum \alpha_n$ est divergente; on en conclut que le produit

$$(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

augmente aussi indéfiniment ou tend vers zéro, quand la série $\sum \alpha_n$ est divergente; il augmente indéfiniment, si les facteurs sont plus grands que un, et il tend vers zéro si les facteurs sont plus petits que un.

En particulier, le produit

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\cdots$$

a pour limite une quantité différente de zéro, puisque la série

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{4n^2}+\ldots$$

est une série convergente.

5. Considérons maintenant la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\,\frac{1}{2n+1}.$$

Soit

$$u_n=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\,\frac{1}{2n+1};$$

on peut écrire u_n sous les deux formes suivantes :

$$u_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{2n+1},$$

$$u_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-2}\right)\frac{1}{2n(2n+1)};$$

par suite,

$$u_n^2=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots$$
$$\times\left[1-\frac{1}{(2n-2)^2}\right]\left(1-\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{2n(2n+1)^2}.$$

Soit Θ_n le produit

$$\Theta_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left[1-\frac{1}{(2n-2)^2}\right],$$

et soit Θ sa limite pour n croissant indéfiniment; on a

$$u_n^2 = \Theta_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{2n(2n+1)^2};$$

par suite,

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n}}\sqrt{\Theta_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}$$

et

$$n^{1+\frac{1}{2}}u_n = \frac{n}{(2n+1)\sqrt{2}}\sqrt{\Theta_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)};$$

quand n croît indéfiniment,

$$\lim n^{1+\frac{1}{2}}u_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Theta}{2}}.$$

Le second membre étant fini, et la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}}$ étant convergente, la proposée est aussi convergente; l'expression précédente montre, en outre, que les termes de la série se rapprochent indéfiniment de ceux de la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}}$; la proposée est convergente comme elle.

6. Considérons la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^{\mu}.$$

En posant

$$u_n = \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^{\mu},$$

on aura, d'après ce qui précède,

$$u_n = \frac{1}{(\sqrt{2n})^{\mu}}\sqrt{\Theta_n^{\mu}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{\mu}}$$

ou bien

$$n^{\frac{\mu}{2}}u_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^{\mu}}\sqrt{\Theta_n^{\mu}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{\mu}},$$

et, par suite,

$$\lim n^{\frac{\mu}{2}} u_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^\mu} \sqrt{\theta^\mu} = \sqrt{\left(\frac{\theta}{2}\right)^\mu}, \qquad \lim n^{\frac{\mu}{2}} u_n = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}}.$$

On voit que, si $\frac{\mu}{2} > 1$, la série proposée est convergente; si $\frac{\mu}{2} = 1$ ou si $\frac{\mu}{2} < 1$, la série est divergente.

On peut traiter d'une manière analogue les séries

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{(2\lambda+1)(2\lambda+3)\ldots(2\lambda+2n-1)}{(2\lambda+2)(2\lambda+4)\ldots(2\lambda+2n)}\right]^\mu$$

et

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{\frac{(2\lambda+\mu)(4\lambda+\mu)\ldots(2n\lambda+\mu)}{(3\lambda+\mu)(5\lambda+\mu)\ldots[(2n+1)\lambda+\mu]}\right\}^\nu;$$

la première renferme deux paramètres λ et μ, la seconde trois paramètres λ, μ, ν. La première est convergente quand $\frac{\mu}{2} > 1$, la seconde est convergente quand ν est plus grand que deux; dans tous les autres cas, elles sont divergentes; ces séries comprennent un certain nombre de séries bien connues.

7. Soit encore la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}$; on sait que le produit $1.2.3\ldots n$, pour de grandes valeurs de n, peut s'écrire

$$1.2.3\ldots n = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n).$$

ε_n ayant pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, on en déduit

$$\sqrt[n]{1.2.3\ldots n} = ne^{-1} \sqrt[2n]{2\pi n}\, \sqrt[n]{(1+\varepsilon_n)}$$

et, en posant $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}$,

$$nu_n = \frac{e}{\sqrt[2n]{2\pi n}\, \sqrt[n]{(1+\varepsilon_n)}};$$

quand n augmente indéfiniment, nu_n a pour limite e : la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}$ est donc divergente.

8. Considérons la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^n x^n}{1.2.3\ldots n}$; posant

$$u_n = \frac{n^n x^n}{1.2.3\ldots n},$$

on a

$$u_n = \frac{n^n x^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)};$$

par suite,

$$u_n = \frac{(ex)^n}{\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)};$$

si $ex > 1$, la série est divergente; si $ex < 1$, elle est convergente; si $ex = 1$, $\lim n^{\frac{1}{2}} u_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ étant divergente, la proposée l'est aussi.

9. Considérons enfin la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} (\sqrt[n]{e} - 1)$; posant $u_n = \sqrt[n]{e} - 1$, le produit $nu_n = n(\sqrt[n]{e} - 1)$ a pour limite l'unité, quand n augmente indéfiniment; par suite, la série, dans ses termes éloignés, devient comparable à la série harmonique : elle est donc divergente.

SUR L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES;

PAR M. CH. BIEHLER.

---

1. On sait que, si l'équation $F(x) = 0$ est réciproque et n'admet pas les racines -1 et $+1$, si l'on fait la

substitution

$$y = \frac{1-x}{1+x},$$

l'équation en y ne renferme plus que des puissances paires de y et, en posant $y^2 = z$, la résolution de l'équation $F(x) = 0$ est ramenée à celle d'une équation de degré sous-double. A deux valeurs de x, $x = a$, $x = \frac{1}{a}$, réciproques, correspondent, en effet, des valeurs de y égales et de signes contraires.

Nous allons nous proposer de chercher la forme générale des fonctions rationnelles

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

qui jouissent de la même propriété que la fonction $\frac{1-x}{1+x}$.

Soit

$$y = \frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m}{B_0 + B_1 x + \ldots + B_p x^p}$$

la fonction cherchée ; on doit avoir

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{\psi\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

et, par suite,

$$\frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m}{x^{m-p}(B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots + B_p)} = -\frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m}{B_0 + B_1 x + \ldots + B_p x^p}.$$

Pour que l'identité soit possible entre les deux membres, il faut que $m = p$. Par suite,

$$\frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m}{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m} = -\frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_0}{B_m x^m + \ldots + B_0}.$$

Pour que ces fractions soient égales, il faut que les termes de même degré des numérateurs et des dénominateurs ne diffèrent que par un facteur constant.

On a donc

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = \lambda A_m, \\ A_1 = \lambda A_{m-1}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ A_m = \lambda A_0, \end{array}\right\} \text{ avec } \left\{\begin{array}{l} B_0 = -\lambda B_m, \\ B_1 = -\lambda B_{m-1}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ B_m = -\lambda B_0. \end{array}\right.$$

Ces égalités donnent

$$A_0 A_m = \lambda^2 A_0 A_m,$$

d'où

$$\lambda^2 = 1,$$
$$\lambda = \pm 1.$$

Prenons $\lambda = 1$, on aura

$$\begin{array}{ll} A_0 = A_m, & B_0 = -B_m, \\ A_1 = A_{m-1}, & B_1 = -B_{m-1}, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Distinguons les cas de m pair et impair :

Si m est pair et égal à $2n$, le numérateur devient

$$A_0(x^{2n} + 1) + A_1(x^{2n-1} + x) + \dots + A_n x^n,$$

il est réciproque.

Quant au dénominateur, il devient

$$B_0(x^{2n} - 1) + B_1(x^{2n-1} - x) + \dots + B_{n-1}(x^{n+1} - x^{n-1});$$

il renferme le facteur $x^2 - 1$ et peut s'écrire

$$(1 - x^2)\psi_{2n-2}(x),$$

$\psi_{2n-2}(x)$ étant un polynôme réciproque de degré pair; par suite,

$$y = \frac{\varphi_{2n}(x)}{(1 - x^2)\psi_{2n-2}(x)}$$

ou bien

$$y = \frac{1 + x}{1 - x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{(1 + x)^2\psi_{2n-2}(x)}$$

ou enfin

$$y = \frac{1+x}{1-x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

$\varphi_{2n}(x)$ et $\psi_{2n}(x)$ étant des polynômes réciproques de degré pair $2n$.

Si m est impair, $m = 2n+1$; le numérateur devient

$$A_0(x^{2n+1}+1) + A_1(x^{2n}+x) + \ldots + A_n(x^{n+1}+x^{n-1});$$

ce polynôme renferme $x+1$ en facteur; on peut l'écrire

$$(x+1)\varphi_{2n}(x),$$

$\varphi_{2n}(x)$ étant un polynôme de degré pair et réciproque; le dénominateur devient dans ce cas

$$B_0(x^{2n+1}-1) + B_1(x^{2n}-x) + \ldots + B_n(x^{n+1}-x^n).$$

C'est le produit de $1-x$ par un polynôme $\psi_{2n}(x)$ réciproque et de degré pair; on a donc

$$y = \frac{1-x}{1+x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)}.$$

La forme trouvée dans le cas de m pair, à savoir

$$y = \frac{1+x}{1-x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

se ramène immédiatement à cette dernière, car on peut l'écrire

$$\frac{1+x}{1-x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)} = \frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)};$$

les polynômes $(1+x)^2$, $(1-x)^2$ sont réciproques et de degré pair.

En prenant $\lambda = -1$, on arrive évidemment aux mêmes résultats.

On peut donc dire que la forme la plus générale de la fonction rationnelle qui jouit des mêmes propriétés que la substitution

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

est

$$y = \frac{1-x}{1+x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

$\varphi_{2n}(x)$ et $\psi_{2n}(x)$ étant des polynômes réciproques et de degré pair.

2. On sait aussi qu'on ramène la résolution de l'équation réciproque de degré pair à celle d'une équation de degré sous-double, en faisant la substitution

$$z = \Theta\left(x, \frac{1}{x}\right),$$

la fonction Θ étant symétrique en x et $\frac{1}{x}$ et rationnelle.

Mais une telle fonction est le quotient de deux fonctions entières et symétriques en x et $\frac{1}{x}$; chacune de ces fonctions symétriques est une fonction entière de la somme et du produit des quantités x et $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire une fonction de $x + \frac{1}{x}$ seulement.

La forme générale de la fonction $\Theta\left(x, \frac{1}{x}\right)$ symétrique en x et $\frac{1}{x}$ est donc

$$z = \frac{G\left(x + \frac{1}{x}\right)}{H\left(x + \frac{1}{x}\right)},$$

G et H étant des fonctions entières quelconques. La plus simple de ces substitutions est évidemment celle dont on fait habituellement usage, à savoir

$$z = x + \frac{1}{x}.$$

Dans la question précédente, l'équation en y^2 ayant été obtenue, on l'abaisse au degré sous-double en posant $y^2 = z$; or la forme générale de y est

$$y = \frac{1-x}{1+x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

d'où

$$z = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}\,\frac{\varphi_{2n}^2(x)}{\psi_{2n}^2(x)}.$$

Mais la fonction $\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}$ peut s'écrire

$$\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{x+\frac{1}{x}-2}{x+\frac{1}{x}+2}.$$

D'autre part, un polynôme $f(x)$ symétrique, de degré 2μ, peut s'écrire

$$f(x) = x^\mu\left[A_0\left(x^\mu + \frac{1}{x^\mu}\right) + \ldots\right],$$

et l'on sait que tous les termes de la forme $x^\mu + \frac{1}{x^\mu}$ sont des fonctions rationnelles de $x+\frac{1}{x}$; la valeur de z peut donc s'écrire

$$z = \frac{x+\frac{1}{x}-2}{x+\frac{1}{x}+2}\,\frac{G_1\left(x+\frac{1}{x}\right)}{H_1\left(x+\frac{1}{x}\right)}.$$

Cette forme rentre donc dans la forme

$$z = \frac{G\left(x+\frac{1}{x}\right)}{H\left(x+\frac{1}{x}\right)}.$$

On voit donc que les deux substitutions que l'on emploie dans la résolution des équations réciproques, à savoir $y = \frac{1-x}{1+x}$, $z = y^2$ et $z = x + \frac{1}{x}$, rentrent, ainsi que les formes les plus générales de ces substitutions, dans un type unique

$$z = \frac{G\left(x+\frac{1}{x}\right)}{H\left(x+\frac{1}{x}\right)},$$

G et H étant des fonctions entières.

TABLE DES MATIERES.

Mai 1887.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

(Troisième Série.) — Juin 1887.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE.

JUIN 1887.

S'adresser, pour la rédaction,
à M. BRISSE, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine),
ou à M. ROUCHÉ, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

SUR LA DROITE DE SIMSON [1];

PAR M. ERNEST CESARO.

Construisons, pour un système de trois masses égales à l'unité, appliquées aux sommets d'un triangle, le centre de gravité G et les axes principaux d'inertie qui y passent. Appelons $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ les coordonnées des sommets du triangle, par rapport à ces axes. On a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0,\\ y_1 + y_2 + y_3 &= 0,\\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 &= 0, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{y_2 - y_3}{x_1} &= \frac{y_3 - y_1}{x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_3} = p,\\ \frac{x_2 - x_3}{y_1} &= \frac{x_3 - x_1}{y_2} = \frac{x_1 - x_2}{y_3} = -q, \end{aligned}\right.$$

p et q étant des constantes. Pour que les dernières égalités soient compatibles entre elles, il faut et il suffit que l'on ait $pq = 3$. Il est, d'ailleurs, facile de déterminer les valeurs de ces constantes, connaissant l'aire T du triangle et les moments d'inertie principaux, A et B. On a, en effet,

$$2T = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2),$$

ou bien, en vertu de (2),

$$2T = p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = q(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2):$$

[1] C'est par une interversion de mise en pages que cet article suit, au lieu de les précéder, les *Remarques sur la géométrie du triangle*.

d'où

$$p = \frac{2T}{A}, \qquad q = \frac{2T}{B}. \tag{3}$$

Incidemment, nous ferons remarquer qu'il est aisé de calculer A et B en fonction des côtés c_1, c_2, c_3 du triangle.

On a d'abord, d'après (3) et à cause de la condition $pq = 3$,

$$3AB = 4T^2 \text{ (1)}.$$

D'autre part, le moment polaire A + B est égal aux $\frac{4}{9}$ de la somme des carrés des médianes, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}$ de la somme des carrés des côtés (2). Par suite, les valeurs de A et B sont comprises dans l'expression

$$\frac{1}{6}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \pm \frac{1}{3}\sqrt{c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 - c_2^2 c_3^2 - c_3^2 c_1^2 - c_1^2 c_2^2}.$$

On en déduit, par exemple, que la distance des deux points, pour lesquels l'ellipse d'inertie se réduit à un cercle, est

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}(c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 - c_2^2 c_3^2 - c_3^2 c_1^2 - c_1^2 c_2^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Cette distance ne devient nulle que dans le cas du triangle équilatéral.

Les coordonnées spéciales, que nous employons ici, jouissent d'une foule de propriétés intéressantes, et, grâce aux formules (1) et (2), elles se prêtent avanta-

---

(1) Le coefficient 3 doit être remplacé par $\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}$, dans le cas de trois masses quelconques, m_1, m_2, m_3.

(2) Il est *nécessaire* que les masses soient égales entre elles, si l'on veut que le moment polaire soit proportionnel à la somme des carrés des côtés.

geusement à l'étude des faits géométriques du triangle [1]. En vue des développements ultérieurs, nous allons chercher les coordonnées α, β du centre du cercle circonscrit au triangle considéré. On a

$$(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 = (\alpha - x_2)^2 + (\beta - y_2)^2 = (\alpha - x_3)^2 + (\beta - y_3)^2;$$

d'où l'on déduit, en ayant égard aux relations (1) et (2),

$$\frac{\alpha}{px_1} - \frac{\beta}{qy_1} = \frac{\alpha}{px_2} - \frac{\beta}{qy_2} = \frac{\alpha}{px_3} - \frac{\beta}{qy_3} = \frac{p-q}{6};$$

puis

$$\alpha = \frac{3(A-B)}{2A^2} x_1 x_2 x_3, \qquad \beta = -\frac{3(A-B)}{2B^2} y_1 y_2 y_3.$$

En tenant compte de ces expressions, on trouve facilement les formules

$$(4) \quad \begin{cases} \sum x_1^3 = \dfrac{2A^2\alpha}{A-B}, & \sum x_1^2 y_1 = \dfrac{2AB\beta}{A-B}, \\ \sum y_1^3 = -\dfrac{2B^2\beta}{A-B}, & \sum x_1 y_1^2 = -\dfrac{2AB\alpha}{A-B}, \end{cases}$$

qui nous seront utiles plus loin.

Cela étant, prenons pour axe des abscisses une droite quelconque, D. Soit r_i sa distance à G, et faisons passer

---

(1) Nous espérons en faire des applications à la Géométrie *récente* du triangle. Il est peut-être utile de faire observer que, si u_1, u_2, u_3 sont les distances d'un point quelconque aux côtés du triangle, les coordonnées x et y du même point sont données par les équations

$$x = \frac{u_1 x_1}{h_1} + \frac{u_2 x_2}{h_2} + \frac{u_3 x_3}{h_3}, \qquad y = \frac{u_1 y_1}{h_1} + \frac{u_2 y_2}{h_2} + \frac{u_3 y_3}{h_3},$$

où h_1, h_2, h_3 sont les hauteurs du triangle. Inversement

$$\frac{u_1}{h_1} = \frac{xx_1}{A} + \frac{yy_1}{B} + \frac{1}{3}.$$

par ce point l'axe des ordonnées. Les coordonnées d'un point quelconque, par rapport aux nouveaux axes, seront représentées par a et $b+\eta$, si l'on pose

$$(5)\qquad a = x\cos\theta - y\sin\theta,\qquad b = x\sin\theta + y\cos\theta,$$

θ étant l'angle de D avec l'ancien axe des abscisses. Pour exprimer que D est une *droite de Simson,* relativement au triangle donné, il faut, par les points où D rencontre les côtés du triangle, élever les perpendiculaires à ces droites et exprimer qu'elles concourent en un même point. Par un calcul très simple, on parvient à la condition

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\eta\sum(a_2-a_3)^2(b_3-b_1)(b_1-b_2)\\ &\quad=\sum(a_2b_3-a_3b_2)(a_2-a_3)(b_3-b_1)(b_1-b_2). \end{aligned}\right.$$

qui donne la valeur de η. Or on trouve sans peine

$$\begin{aligned} -\sum&(a_2-a_3)^2(b_3-b_1)(b_1-b_2)\\ &= 2\mathrm{T}\sum a_1(b_2-b_3) = 4\mathrm{T}^2. \end{aligned}$$

On simplifie, de même, le second membre de (6), en tenant compte des égalités évidentes

$$a_2b_3-a_3b_2 = a_3b_1-a_1b_3 = a_1b_2-a_2b_1 = \tfrac{2}{3}\mathrm{T},$$

et la condition (6) devient

$$(7)\qquad 6\mathrm{T}\eta = \sum(a_2-a_3)(b_3-b_1)(b_1-b_2).$$

Nous allons faire retour aux anciennes coordonnées, afin de mettre en évidence, dans le second membre de (7), la variable θ. Avant de faire usage des formules (5), remarquons que, en vertu de (1), on a

$$x_1^2-x_2x_3=\frac{\mathrm{A}}{2},\qquad y_1^2-y_2y_3=\frac{\mathrm{B}}{2},\qquad x_2y_3+x_3y_2=2x_1y_1,$$

et, par suite,

$$(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) = \frac{A}{2} - 3x_1^2,$$

$$(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) = \frac{B}{2} - 3y_1^2,$$

$$(x_3 - x_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)(y_3 - y_1) = -6x_1y_1.$$

L'emploi des formules (5) donne donc

$$(b_3 - b_1)(b_1 - b_2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta) - 3(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta)^2;$$

puis, par substitution dans (7) et en observant (2),

$$2T\eta = \sum (px_1\sin\theta + qy_1\cos\theta)(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta)^2.$$

Si l'on développe le second membre, on obtient finalement

$$\frac{A-B}{2}\eta = A\alpha\sin^3\theta + (A+2B)\beta\sin^2\theta\cos\theta$$
$$-(2A+B)\alpha\sin\theta\cos^2\theta - B\beta\cos^3\theta,$$

pourvu que l'on ait égard aux formules (3) et (4). On peut écrire, plus simplement,

(8) $$\eta = \tfrac{1}{2}(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) - R\cos(3\theta - \varphi),$$

après avoir posé, pour abréger,

$$\frac{3A+B}{A-B}\alpha = 2R\sin\varphi, \qquad \frac{A+3B}{A-B}\beta = 2R\cos\varphi,$$

où R et φ sont des *constantes*.

Remarquons, en général, que, si l'on détermine une droite par sa distance η à un *point fixe*, et par θ l'angle qu'elle fait avec une *direction fixe*, les droites qui satisfont à l'équation

(9) $$\eta = F(\theta)$$

enveloppent une certaine courbe, dont il est facile d'ob-

tenir l'équation intrinsèque. Si, en effet, ξ et η sont les coordonnées variables du point fixe, par rapport à la tangente et à la normale à la courbe, on sait que

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta - \rho}{\rho}, \qquad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\xi}{\rho}, \qquad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho},$$

et, par suite, la dérivation de l'équation (9) donne

$$\xi = F'(\theta);$$

puis, par une nouvelle dérivation,

$$\rho = F(\theta) + F''(\theta).$$

Enfin, si l'on multiplie par $d\theta$ les membres de cette équation, et que l'on intègre, on obtient

$$-s = \int F(\theta)\,d\theta + F'(\theta).$$

L'élimination de θ entre les expressions de ρ et de s conduit à l'équation intrinsèque demandée.

Si l'on applique les calculs précédents à l'équation (8), on trouve d'abord

$$\xi = -\tfrac{1}{2}(\beta \sin\theta - \alpha \cos\theta) + 3R \sin(3\theta - \varphi);$$

puis, successivement,

$$\rho = 8R\cos(3\theta - \varphi), \qquad 3s = -8R\sin(3\theta - \varphi).$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient

$$\rho^2 + 9s^2 = 64R^2.$$

L'enveloppe de D est donc une hypocycloïde à trois rebroussements : c'est l'*hypocycloïde de Ferrers* [1].

Si l'on combine entre elles les formules qui précè-

---

[1] Aux nombreuses recherches sur cette ligne remarquable, il faut ajouter une *Étude géométrique*, publiée récemment par M. Carmelo Intrigila, dans le *Journal de Battaglini* (1885, p. 263-284).

dent, on voit que l'on peut écrire

$$\rho = 4(\eta_0 - 3\eta), \qquad s = \tfrac{4}{9}(\xi_0 - 3\xi),$$

ξ_0 et η_0 étant les coordonnées du centre du cercle circonscrit, relativement à la tangente et à la normale à l'hypocycloïde. Or, d'après un théorème connu, on sait que les coordonnées de l'orthocentre sont $3\xi - 2\xi_0$, $3\eta - 2\eta_0$. Conséquemment (¹), le centre du cercle directeur de l'hypocycloïde de Ferrers est au milieu de la droite qui joint le point de rencontre des hauteurs au centre du cercle circonscrit. Les distances du point en question à la tangente et à la normale à la courbe, en un point quelconque, représentent respectivement, en valeur absolue, la huitième partie du rayon de courbure au point considéré, et les $\frac{9}{8}$ de l'arc qui sépare ce point du sommet voisin. Il est presque inutile d'ajouter que la courbe dont il s'agit est la trajectoire d'un point d'une circonférence, de rayon R, roulant, sans glisser, à l'intérieur d'une circonférence de rayon 3R : cela résulte de la simple inspection de l'équation intrinsèque trouvée (²).

Examinons, maintenant, le cas plus général de trois droites concourantes, qui rencontrent les côtés d'un triangle sous le même angle ω. On sait que les trois points de rencontre sont sur une droite D_ω. En opérant

---

(¹) On sait que, en général, les coordonnées du centre du cercle directeur de la courbe cycloïdale $a^2\rho^2 + b^2s^2 = a^2b^2$ sont $\dfrac{b^2s}{a^2 - b^2}$, $\dfrac{a^2\rho}{a^2 - b^2}$.

(²) Il faut se rappeler que, pour la ligne $a^2\rho^2 + b^2s^2 = a^2b^2$, le rayon du cercle générateur est $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{ab}{a+b}$; celui du cercle directeur est $\dfrac{ab^2}{a^2 - b^2}$.

comme précédemment, on trouve, au lieu de (7),

$$6T\eta = \sum(a_2 - a_3)(b_3 - b_1)(b_1 - b_2)$$
$$+ 3(b_2 - b_3)(b_3 - b_1)(b_1 - b_2)\cot\omega;$$

puis, après quelques transformations et par dérivations successives,

$$\eta = \tfrac{1}{2}(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) - R\cos(3\theta - \varphi)$$
$$+ [\tfrac{3}{2}(\beta\sin\theta - \alpha\cos\theta) - R\sin(3\theta - \varphi)]\cot\omega,$$
$$\xi = -\tfrac{1}{2}(\beta\sin\theta - \alpha\cos\theta) + 3R\sin(3\theta - \varphi)$$
$$+ [\tfrac{3}{2}(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta) - 3R\cos(3\theta - \varphi)]\cot\omega,$$
$$\rho = \frac{8R}{\sin\omega}\sin(3\theta + \omega - \varphi).$$

Enfin, par intégration,

$$3s = \frac{8R}{\sin\omega}\cos(3\theta + \omega - \varphi).$$

Si l'on élimine θ, on obtient

$$\rho^2 + 9s^2 = \frac{64R^2}{\sin^2\omega}.$$

L'enveloppe de D_ω est donc une hypocycloïde semblable à la courbe de Ferrers : elle est engendrée par un point d'une circonférence, de rayon $\frac{R}{\sin\omega}$, roulant, sans glisser, à l'intérieur d'une circonférence trois fois plus grande.

Rapportons tout à la droite D, ou droite de Simson proprement dite, prise comme axe des abscisses, l'origine étant placée au point M, où elle touche son enveloppe. Si l'on compare entre elles les formules obtenues pour la droite de Simson *généralisée*, on voit que les coordonnées du point où cette droite, parallèle à D, touche son enveloppe, sont

(10) $$-3\eta\cot\omega,\quad \tfrac{1}{3}(4\xi_0 - 3\xi)\cot\omega,$$

et que les coordonnées intrinsèques de l'enveloppe en question sont

$$(11) \qquad \rho - 3s\cot\omega, \quad s + \tfrac{1}{3}\rho\cot\omega.$$

Divisant l'une par l'autre les expressions (10), on voit immédiatement que les points de contact des droites de Simson généralisés, de même direction, sont sur une droite Δ_θ. Si l'on applique à cette droite les méthodes habituelles de la Géométrie intrinsèque, on trouve que, lorsque θ varie, Δ_θ touche son enveloppe en un point P, dont les coordonnées sont

$$-\frac{\rho}{s}\eta, \quad \rho + \frac{\rho}{s}\xi.$$

En partant de ces expressions, il serait aisé de chercher l'équation intrinsèque de la ligne (P), enveloppe des droites Δ.

Nous allons signaler une importante propriété de la ligne (P). On démontre facilement que les centres de courbure de toutes les hypercycloïdes sont, pour chaque valeur de θ, sur une perpendiculaire à MG, qui rencontre Δ_θ au point P. Il en résulte qu'en ce point il y a rebroussement pour une certaine hypocycloïde. Du reste, d'après les expressions (11), on voit que, pour chaque valeur de θ, deux valeurs de ω, qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$, déterminent respectivement un *point* de *rebroussement* et un *sommet* de deux hypocycloïdes particulières. Le point de rebroussement correspond évidemment à la valeur

$$\cot\omega = \frac{\rho}{3s};$$

en la substituant dans les expressions (10), on voit que les coordonnées du point cherché sont précisément les coordonnées de P. Ainsi, les points de rebroussement

de toutes les hypocycloïdes considérées sont sur la ligne (P). La valeur que nous avons trouvée pour ω montre, en outre, que l'angle $\omega + 3\theta$ est constant, ce qui pourrait donner lieu à d'autres considérations ; mais nous ne nous y arrêterons pas. On traiterait, par les mêmes formules, un grand nombre d'autres questions intéressantes. Nous nous contenterons de faire remarquer, pour finir, que les centres des cercles directeurs de toutes les hypocycloïdes sont situés sur une droite : ils sont, en effet, également éloignés du centre du cercle circonscrit et du point de rencontre des hauteurs ([1]).

SUR LE THÉORÈME DE ROLLE;

Par M. J. COLLIN,

Professeur de Mathématiques spéciales à l'École Saint-Charles.

Soit l'équation $f(x) = 0$, et soient a', b', ..., l' les racines de l'équation dérivée $f'_x = 0$.

Si l'on met l'équation proposée sous forme homogène et qu'on l'écrive

$$f(x,y) = 0 \qquad \text{ou} \qquad xf'_x + yf'_y = 0,$$

l'application du théorème de Rolle peut être notablement simplifiée en beaucoup de cas à l'aide des théorèmes suivants :

Théorème I. — *Pour que deux racines de $f'_x = 0$ comprennent effectivement une racine de $f(x,y) = 0$,*

([1]) On parvient beaucoup plus simplement aux mêmes résultats, par des considérations purement géométriques ; mais cela n'amoindrit en rien l'importance des méthodes intrinsèques, qui sont, avant tout, des méthodes d'*investigation*.

il faut et il suffit qu'elles comprennent entre elles un nombre impair de racines de $f'_y = 0$ [1].

En effet, pour une valeur $d' \pm \varepsilon$ très voisine de l'une quelconque des racines d' de la dérivée f'_x, le polynôme $f(x,y)$ est de même signe que f'_y.

THÉORÈME II. — *Pour que l'équation* $f(x,y) = 0$ *ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que :* 1° f'_x *et* f'_y *aient toutes leurs racines réelles ;* 2° *que pour* $x = \pm\infty$ *les polynômes* $f(x,y)$ *et* f'_y *soient de signes contraires l'un de l'autre ;* 3° *que, entre deux racines consécutives quelconques de* f'_x, *il y ait une racine et une seule de* f'_y.

1° Ainsi qu'on le sait, il faut que f'_x ait toutes ses racines réelles ; mais cela est tout aussi vrai de f'_y, ainsi qu'on le voit immédiatement en considérant la transformée aux inverses de l'équation proposée.

2° Si a' est la plus petite racine de f'_x, alors, pour $x = a' - \varepsilon$, les deux polynômes $f(x,y)$ et f'_y ont même signe ; donc, pour que $f(x,y) = 0$ ait une racine entre $-\infty$ et a', il faut et il suffit que $f(x,y)$ et f'_y soient de signes contraires pour $x = -\infty$. Même raisonnement pour l' et $+\infty$.

3° Il faut enfin que deux racines consécutives quelconques c' et d' de f'_x comprennent une racine et une seule de f'_y. En effet, si, dans l'intervalle de c' à d', il y avait 0 ou 2 racines de f'_y, il n'y en aurait aucune de l'équation proposée ; si, au contraire, il y avait trois racines de f'_y dans cet intervalle, alors d'autres intervalles manqueraient de racines de f'_y et par suite aussi de racines de l'équation proposée.

---

[1] Souvent il sera plus facile et plus rapide de résoudre cette équation $f'_y = 0$ que de substituer les racines de f'_x dans $f(x, y)$.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, évidemment.

Application. — *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation* $x^3 + px + q = 0$ *ait toutes ses racines réelles.*

On a ici

$$f'_x = 3x^2 + p, \qquad f'_y = 2px + 3q.$$

Donc, il faut et *il suffit* que, d'une part, suivant les deux premières conditions, on ait

$$p < 0,$$

et que, d'autre part, suivant la troisième condition, on ait

$$3\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2 + p < 0,$$

c'est-à-dire

$$27q^2 + 4p^3 < 0.$$

Cette dernière inégalité entraîne d'ailleurs la première et suffit à elle seule.

Remarque. — D'après ce qui précède, pour que l'équation $f(x, y) = 0$ ait toutes ses racines réelles, il suffit que f'_y ait $m - 2$ racines finies. Mais, si f'_y avait $m - 3$ racines finies et deux racines infinies, autrement dit si l'équation proposée $f(x, y) = 0$ manquait de deux termes entre le premier et le second, cette équation $f(x, y) = 0$ aurait au moins deux racines imaginaires.

On retrouve donc ainsi un corollaire connu du théorème des lacunes. Cela n'a d'ailleurs rien d'étonnant, car on sait que le théorème de Descartes n'est lui-même qu'un corollaire du théorème de Rolle.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. WEILL.

I. Considérons deux courbes planes C et C′ et un point O; soient M et M′ deux points pris respectivement sur les deux courbes et qui se correspondent de manière que les tangentes en ces points aux deux courbes soient parallèles.

Par le point O, menons une droite égale et parallèle à MM′, l'extrémité μ de cette droite décrit une courbe C″. Je dis d'abord, et c'est là un résultat bien connu, que la tangente à la courbe C″ au point μ est parallèle aux tangentes en M et M′. En effet, en désignant par $x, y, x', y', \alpha, \beta$ les coordonnées de M, M′, μ, l'origine étant en O, on a

$$\alpha = x - x',$$

$$\beta = y - y',$$

$$d\alpha = dx - dx',$$

$$d\beta = dy - dy',$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} = \lambda,$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy - dy'}{dx - dx'} = \lambda.$$

Des mêmes formules, on déduit

$$d\sigma = d\alpha\sqrt{1+\lambda^2}.$$

$$ds = dx\sqrt{1+\lambda^2}.$$

$$ds' = dx'\sqrt{1+\lambda^2},$$

$$d\sigma = ds - ds'.$$

Il en résulte que l'arc élémentaire de la courbe C″ est

égal à la différence des arcs élémentaires correspondants des deux courbes C et C′, et par suite que le rayon de courbure en μ est égal à la somme ou à la différence des rayons de courbure en M et M′. Ce dernier résultat peut s'établir facilement par la Géométrie en remplaçant les trois courbes dans le voisinage des points M, M′ et μ par leurs cercles de courbure, ce qui est permis dans le cas actuel. Au moyen du théorème précédent, on peut construire des courbes dont le périmètre soit égal à la somme ou à la différence des périmètres de deux courbes données ; on peut remarquer, en particulier, que la différence entre les périmètres d'une courbe convexe et de sa parallèle extérieure à une distance l est égale à la circonférence d'un cercle de rayon l.

II. Considérons deux courbes C et C′; en un point M pris sur la première menons à cette courbe une tangente qui rencontre la seconde en M′; en appelant ρ la longueur MM′ et ω l'angle que fait sa direction avec une droite fixe, l'élément de surface compris entre les deux courbes et deux tangentes infiniment voisines a pour expression $\rho^2 d\omega$. Ceci posé, menons par un point O du plan une droite égale et parallèle à MM′, l'extrémité μ de cette droite décrira une courbe C″; l'aire de cette courbe C″ sera, comme on voit, égale à la portion de surface comprise entre les courbes C et C′. De là, des conséquences particulières intéressantes. Considérons, par exemple, un angle droit AMB dont le sommet M décrit une courbe C′ et dont les côtés touchent en A et B une courbe C ; si, par un point O du plan, on mène une droite parallèle à AM et de longueur AB, l'extrémité μ de cette droite décrira une courbe dont l'aire sera double de l'aire comprise entre les deux courbes C et C′.

III. Soit

$$x\cos\omega + y\sin\omega - f(\omega) = 0$$

l'équation d'une tangente à une courbe C, et α, β les coordonnées d'un point P du plan.

La podaire de P par rapport à la courbe C a pour surface

$$\int_0^{2\pi} [\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega - f(\omega)]^2 d\omega$$

ou bien

$$2\pi\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} - 2\alpha\int_0^{2\pi} f(\omega)\cos\omega\, d\omega \\ - 2\beta\int_0^{2\pi} f(\omega)\sin\omega\, d\omega + \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^2 d\omega.$$

Cette formule peut donner lieu à certains problèmes relatifs à l'aire de la podaire. Ainsi, la courbe C étant donnée, le lieu du point P, pour lequel la podaire a une aire donnée, se compose de deux cercles concentriques, résultat connu (*voir* BERTRAND, *Traité de Calcul intégral*, p. 365).

Prenons, en particulier, pour $f(\omega)$, la fonction $\sin m\omega$ ou $\cos m\omega$, m étant un entier plus grand que 1, les coefficients de 2α et de 2β sont nuls, et la formule se simplifie.

Pour généraliser la notion de podaire, déterminons, sur chaque tangente à une courbe donnée, un point M par l'intersection de cette tangente et d'une droite, partant d'un point P fixe, et déterminée en même temps que la tangente, l'équation d'une pareille droite sera

$$y - \beta = \varphi(\omega)(x - \alpha).$$

On voit alors immédiatement que le lieu que doit décrire le point P pour que la courbe, lieu des points M

correspondants, ait une aire donnée, est une courbe générale du second degré.

SUR LA COURBE DU QUATRIÈME DEGRÉ A DEUX POINTS DOUBLES;

PAR M. WEILL.

Un point d'une conique étant défini, à l'aide du paramètre variable λ, par les équations

$$\alpha = \lambda\gamma, \qquad \beta = \frac{\gamma}{\lambda},$$

α, β, γ désignant trois fonctions linéaires de x et y, les trois sommets d'un triangle qui se déplace en restant inscrit dans cette conique et circonscrit à une autre conique fixe correspondront à trois valeurs de λ données par l'équation du troisième degré

$$(1) \qquad \lambda^3 + (mC + n)\lambda^2 + (m'C + n')\lambda + C = 0,$$

dans laquelle C est un paramètre variant avec la position du triangle, les quantités m, m', n, n' étant constantes. Ceci posé, l'équation

$$K\alpha^2 + L\beta^2 + X\gamma^2 + 2Y\beta\gamma + 2Z\alpha\gamma + \alpha\beta = 0,$$

dans laquelle K et L sont des constantes, et X, Y, Z des variables, définit une conique passant par deux points fixes situés sur la droite $\gamma = 0$.

Cherchons à exprimer que trois des quatre points où cette conique variable rencontre la conique donnée forment les sommets d'un des triangles considérés.

Il faut pour cela que l'équation en λ du quatrième

degré, qui donne les valeurs de λ correspondant à ces quatre points, admette un facteur de la forme (1). En faisant la division et écrivant que le reste est nul, on trouve les relations

$$2Z - K(mC + n) = \frac{L}{C},$$

$$X + 1 - (m'C + n')K = \frac{L}{C}(mC + n),$$

$$2Y - cK = \frac{L}{C}(m'C + n').$$

Transportant ces valeurs de X, Y, Z dans l'équation de la conique variable, elle devient

$$\begin{aligned} &C^2\gamma(Km\alpha + K\beta + m'\gamma) \\ &- C\{K\alpha^2 + L\beta^2 + \alpha\beta + \gamma[m'L\beta + Kn\alpha + (mL + n'K - 1)\gamma]\} \\ &\qquad + L\gamma(\alpha + n'\beta + n\gamma) = 0. \end{aligned}$$

Telle est l'équation d'une conique, variable avec C, passant par deux points fixes et par les trois sommets d'un triangle variable inscrit et circonscrit à deux coniques fixes. On peut écrire cette équation

$$C^2\gamma.\delta + 2C.S + \gamma\delta' = 0.$$

On voit que, lorsque C varie, cette conique a pour enveloppe la courbe ayant pour équation

$$S^2 - \gamma^2\delta\delta' = 0.$$

Cette courbe du quatrième degré a pour points doubles les deux points fixes. Chaque conique variable touche son enveloppe en deux points, et la droite qui joint ces deux points passe par un point fixe, intersection des droites δ et δ'; cette droite, ayant pour équation $\delta' = C^2\delta$, correspond à deux coniques du système, elle rencontre l'enveloppe, qui est du quatrième degré, en quatre points qui se séparent en deux groupes de deux

points, correspondant respectivement à deux coniques déterminées par les valeurs $+C$ et $-C$ du paramètre.

Réciproquement, toute courbe du quatrième degré à deux points doubles peut être obtenue par ce procédé. En prenant pour points doubles les points cycliques, on obtient des résultats relatifs aux anallagmatiques du quatrième ordre, courbes qui ont été si souvent étudiées; on voit que ces courbes peuvent être considérées, d'une manière générale, comme l'enveloppe d'un cercle circonscrit à un triangle variable inscrit et circonscrit à deux coniques fixes. Ce mode de génération permet d'étudier, sous un point de vue nouveau, ces courbes si connues.

Revenons au cas général de la courbe à deux points doubles; en prenant pour triangle de référence celui qui est formé par les droites γ, δ, δ', on voit facilement qu'un point de la courbe est déterminé par des équations de la forme

$$\delta' : \delta : \gamma = C^2 : 1 : \varphi(C),$$

$\varphi(C)$ étant de la forme

$$\frac{aC^2 + bC + c \pm \sqrt{a'C^4 + \ldots}}{a''C^2 + b''C + c},$$

et l'on en déduit, par des procédés connus, la représentation paramétrique à l'aide des fonctions elliptiques.

REMARQUES SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ;

Par M. H. LAURENT.

Dans les Traités classiques, on dit généralement que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expres-

sion

$$(1) \qquad p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n$$

soit une différentielle exacte sont que l'on ait identiquement

$$(2) \qquad \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$$

pour toutes les valeurs des indices i et j, telles que $i \leqq n$, $j \leqq n$. Cela est vrai, mais l'expression (1) est aussi une différentielle exacte quand l'équation (2) est identiquement vérifiée pour $i = 1$, puis pour $i = 2$ non plus identiquement, mais seulement pour $x_1 = x_1^0$, quels que soient $x_2, x_3, \ldots, x_n$, puis pour $i = 3$, mais seulement pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ quels que soient $x_3, x_4, \ldots, x_n$, etc. C'est ce que j'ai démontré dans un travail qui a paru l'an dernier dans les *Nouvelles Annales*.

Ce fait peut être généralisé et étendu au cas où les conditions d'intégrabilité affectent d'autres formes, et, si l'attention des géomètres s'était portée plus tôt sur ces points importants, Lagrange, Charpit, Pfaff et Jacobi seraient tous parvenus à la méthode de Cauchy pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Dans le travail que je viens de citer, j'ai montré comment Lagrange et Charpit auraient pu découvrir la méthode de Cauchy; je montrerai ici comment la méthode de Jacobi peut y conduire également. Je vais commencer par modifier dans le sens que j'ai indiqué les diverses formes des conditions d'intégrabilité.

Considérons d'abord les équations aux différentielles totales suivantes où X_{ij} est fonction des u et des x :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} du_1 = X_{11}\,dx_1 + X_{12}\,dx_2 + \ldots + X_{1n}\,dx_n, \\ du_2 = X_{21}\,dx_1 + X_{22}\,dx_2 + \ldots + X_{2n}\,dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ du_m = X_{m1}\,dx_1 + X_{m2}\,dx_2 + \ldots + X_{mn}\,dx_n. \end{array} \right.$$

Pour que ces équations soient *complètement intégrables*, c'est-à-dire pour qu'elles définissent m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ renfermant m constantes arbitraires, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{dX_{ki}}{dx_j} = \frac{dX_{kj}}{dx_i},$$

le d indiquant une dérivée totale, et par conséquent

$$\frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_j} + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx_j} + \ldots = \frac{\partial X_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{kj}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_i} + \ldots$$

ou bien

$$(2) \quad \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_1} X_{1j} + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_2} X_{2j} + \ldots = \frac{\partial X_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{kj}}{\partial u_1} X_{1i} + \ldots,$$

et cela quel que soit k.

Je n'insiste pas sur la démonstration bien connue de la formule (2) en tant que formule nécessaire; je vais maintenant essayer de démontrer qu'elle est suffisante.

Je suppose d'abord que l'on ait seulement, quels que soient k et i,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial X_{k1}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{k1}}{\partial u_1} X_{1i} + \ldots + \frac{\partial X_{k1}}{\partial u_m} X_{mi} \\ &= \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_1} X_{11} + \ldots + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_m} X_{m1}. \end{aligned} \right.$$

Déterminons m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ au moyen des équations différentielles ordinaires

$$du_1 = X_1\, dx_1, \qquad du_2 = X_{21}\, dx_1, \qquad \ldots, \qquad du_m = X_{m1}\, dx_1,$$

en supposant $x_2, \ldots, x_n$ constants; désignons par u_1^0, u_2^0, ..., u_m^0 les valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ pour $x_1 = x_1^0$; ces valeurs pourront d'ailleurs être fonctions de x_2, $x_3, \ldots, x_n$; on aura alors

$$(4\ bis) \quad \frac{du_1}{dx_1} = X_{11}, \qquad \frac{du_2}{dx_1} = X_{21}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m}{dx_1} = X_{m1}.$$

Différentions ces équations par rapport à x_i, nous aurons des équations telles que

$$\frac{d^2 u_p}{dx_1\, dx_i} = \frac{\partial X_{p1}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_i} + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\frac{du_m}{dx_i},$$

où l'on doit supposer $p = 1, 2, \ldots, m$. Cette équation peut s'écrire

$$\frac{d^2 u_p}{dx_1\, dx_i} = \frac{\partial X_{p1}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_m}{dx_i} - X_{mi}\right)$$
$$+ \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1} X_{1i} + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m} X_{mi},$$

ou, en vertu de l'identité (3),

$$\frac{d^2 u_p}{dx_1\, dx_i} = \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_m}{dx_i} - X_{m1}\right)$$
$$+ \frac{\partial X_{pi}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_1} X_{11} + \ldots + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_m} X_{m1},$$

ou, en vertu de (4 *bis*),

$$\frac{d^2 u_p}{dx_1\, dx_i} = \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_n}{dx_i} - X_{m1}\right)$$
$$+ \frac{\partial X_{pi}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_m}\frac{du_m}{dx_1},$$

ou enfin

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{du_p}{dx_i} - X_{pi}\right)$$
$$= \frac{\partial X_{p1}}{\partial u}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_m}{dx_i} - X_{m1}\right).$$

On a ainsi m équations que l'on déduit de celle-ci en faisant $p = 1, 2, 3, \ldots, m$: ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux m quantités

$$\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}, \qquad \frac{du_2}{dx_i} - X_{2i}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m}{dx_i} - X_{mi};$$

si l'on considère ces m quantités comme des inconnues, on pourra considérer ces équations comme des équations différentielles ordinaires et, si on les intègre de manière que les inconnues s'annulent pour $x_1 = x_1^0$, on aura toujours

$$\frac{du_1}{dx_i} = X_{1i}, \qquad \frac{du_2}{dx_i} = X_{2i}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m}{dx_i} = X_{mi}.$$

Cela revient à dire que, si les formules (3) sont identiques, ou, si l'on veut, que si les formules (2) sont identiques pour $j = 1$, et, si elles ont lieu, quels que soient $x_2, \ldots, x_n$ pour $x_1 = x_1^0$, les formules (1) sont intégrables, c'est-à-dire que les formules (2) sont toutes identiques. Autrement dit :

Si les formules (3) sont identiques et si le système suivant, où l'indice o indique que $x_1 = x_1^0$,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} du_1^0 = X_{12}^0\, dx_2 + \ldots + X_{1n}^0\, dx_n^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ du_m^0 = X_{m2}^0\, dx_2 + \ldots + X_{mn}^0\, dx_n^0, \end{array} \right.$$

est intégrable complètement, (1) le sera aussi, et, pour l'intégrer, il suffira d'intégrer les équations (4) en déterminant les constantes d'intégration $u_1^0, u_2^0, \ldots$ par les équations (5). On peut donc énoncer le théorème suivant qui comprend comme cas particulier celui qui a fait l'objet de mon travail cité tout à l'heure :

Pour que les équations (1) *soient complètement intégrables, il faut et il suffit que l'on ait, quels que soient* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *k et i,*

$$\frac{\partial X_{k1}}{\partial x_i} + \sum_\mu \frac{\partial X_{k1}}{\partial u_\mu} X_{\mu i} = \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_1} + \sum_\mu \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_\mu} X_{\mu 1};$$

puis, pour $x_1 = x_1^0$, *quels que soient* $x_2, x_3, \ldots, x_m$,

k et i,

$$\frac{\partial X_{k2}}{\partial x_i} + \sum_\mu \frac{\partial X_{k2}}{\partial u_\mu} X_{\mu i} = \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_2} + \sum_\mu \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_\mu} X_{\mu 2},$$

et ainsi de suite.

Pour intégrer le système (1), *on intègre le système*

$$\frac{du_1}{dx_1} = X_{11}, \quad \frac{du_2}{dx_1} = X_{21}, \quad \ldots, \quad \frac{du_m}{dx_1} = X_{m1},$$

et l'on détermine les valeurs $u_1^0, u_2^0, \ldots$, *que prennent* $u_1, u_2, \ldots$ *pour* $x_1 = x_1^0$, *au moyen des équations*

$$\frac{du_1^0}{dx_2} = X_{12}^0, \quad \frac{du_2^0}{dx_2} = X_{22}^0, \quad \ldots, \quad \frac{du_m^0}{dx_1} = X_{m2}^0,$$

$X_{12}^0, \ldots$ *désignant les valeurs de* $X_{12}, \ldots$ *pour* $x_1 = x_1^0$; *on détermine de même les valeurs* u_1^{00}, $u_2^{00}, \ldots$ *de* $u_1^0, u_2^0, \ldots$ *pour* $x_2 = x_2^0$, *au moyen des équations*

$$\frac{du_1^{00}}{dx_3} = X_{13}^{00}, \quad \frac{du_2^{00}}{dx_3} = X_{23}^{00}, \quad \ldots, \quad \frac{du_m^{00}}{dx_3} = X_{m3}^{00},$$

et ainsi de suite.

On retrouve ainsi, mais par une tout autre voie, la règle donnée par M. Mayer pour l'intégration des équations aux différentielles totales. (*A suivre.*)

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1886.

Mathématiques spéciales.

1° Étant donnés une surface du second ordre S et deux points A, B, on mène par le point B une sécante qui rencontre la surface S aux points C, C′ et le plan polaire du point A au point D.

Soient M et M′ les points où la droite AD rencontre les plans qui touchent la surface S aux points C et C′. La sécante BD tournant autour du point B, on demande le lieu décrit par les points M et M′.

2° Ce lieu se compose de deux surfaces du second ordre, dont l'une est indépendante de la position occupée par le point B dans l'espace, et dont l'autre Σ dépend de la position de ce point.

Chercher ce que devient la surface Σ quand, dans la construction qui donne les points de cette surface, on fait jouer au point A le rôle du point B et inversement.

3° Le point A restant fixe, déterminer les positions occupées par le point B quand la surface Σ n'a pas un centre unique à distance finie.

Mathématiques élémentaires.

On donne, à l'intérieur d'un cercle de rayon R, un point P dont la distance au centre O du cercle est a. On mène par ce point P deux cordes rectangulaires AC, BD, et l'on mène les tangentes au cercle aux extrémités de ces cordes.

Déterminer l'angle APO de façon que l'aire du quadrilatère convexe EFGH formé par ces tangentes soit égale à une aire donnée K^2. Discuter.

Philosophie.

1. Soit l'équation du second degré

$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 2)x - 7\lambda - 1 = 0,$$

dans laquelle la lettre λ représente un nombre donné.

Déterminer, suivant la grandeur du nombre donné λ, le nombre des racines de cette équation comprises dans chacun des trois intervalles suivants : de $-\infty$ à -1, de -1 à $+1$, de $+1$ à $+\infty$.

2. On donne deux droites OR, OS, qui se coupent au point O, et, sur OR, deux points A, B. On considère toutes les sphères qui coupent la droite OR aux points A, B, et qui sont tangentes à la droite OS. On demande :

1° Le lieu du centre de ces sphères;

2° Le lieu de la droite d'intersection des deux plans tangents, l'un en A, l'autre en B, à chacune de ces sphères;

3° Le lieu des points de contact des plans tangents menés à toutes les sphères considérées par une droite donnée dans le plan des deux droites OR, OS;

4° Le lieu des points de contact des plans tangents menés à toutes les sphères considérées par un point donné dans le plan des droites OR, OS.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (CONCOURS DE 1886).

Mathématiques.

On considère les courbes du troisième degré C, représentées par l'équation

$$x^2y + a^2x = \lambda,$$

où λ désigne un paramètre variable.

On demande de démontrer qu'il existe deux courbes de cette espèce tangentes à une droite quelconque D du plan, ayant pour équation

$$y = mx + p,$$

et de calculer les coordonnées des deux points de contact M et M'. Distinguer les droites D, pour lesquelles ces deux points sont réels, des droites pour lesquelles

ils sont imaginaires. Examiner pour quelles positions de la droite D les deux points M et M′ viennent se confondre en un seul, et trouver, dans ce cas, le lieu décrit par le point de contact.

Connaissant les coordonnées (α, β) d'un point de contact M d'une courbe C avec une droite D, trouver les coordonnées (α', β') du second point de contact M′ situé sur D. Construire la courbe décrite par le point M′ lorsque le point M décrit la ligne droite

$$\beta = \alpha - 2a.$$

Physique.

1. Une cloche cylindrique, en cristal, de poids p, de section intérieure s, de hauteur intérieure $h + l$, est renversée sur le mercure, qui s'y élève à la hauteur h; le reste de la cloche contient de l'air sur la longueur l. La pression atmosphérique est $0^m,76$ et la température 0°.

Quel est l'effort nécessaire pour soutenir la cloche?

Que devient cet effort si l'on fait passer dans la cloche un morceau de fer de volume v, le niveau du mercure à l'extérieur restant invariable?

a, m, c, f sont les poids spécifiques de l'air, du mercure, du cristal et du fer.

Application numérique : $p = 450^{gr}$; $s = 40^{cq}$; $h = l = 0^m,10$; $v = 200^{cc}$. Le poids du litre d'air dans les conditions mormales est $1^{gr},3$; $m = 13,6$; $c = 3$; $f = 7,48$.

2. Atténuation et correction des pertes de chaleur dans les expériences calorimétriques.

ÉCOLE FORESTIÈRE (CONCOURS DE 1886).

Mathématiques (3 heures.)

1. Si, d'un point A, extérieur à une droite, on mène à cette droite la perpendiculaire AB et les obliques AC, AD, AE dont les longueurs croissent successivement d'une même quantité, les distances BC, CD, DE vont en diminuant.

2. Prouver que le volume d'une tranche sphérique limitée par deux plans parallèles situés du même côté du centre est équivalent à la différence entre le cylindre de même hauteur que la tranche, dont la base serait un grand cercle de la sphère, et le tronc de cône de même hauteur dont les bases auraient respectivement pour rayons les distances du centre de la sphère aux deux plans qui limitent la tranche.

3. Une personne contracte un emprunt remboursable au moyen de deux annuités de $1061^{fr},80$; on a calculé qu'il serait aussi avantageux pour elle de payer quatre annuités de $561^{fr},80$. On demande à combien on évalue le taux de l'intérêt. Le premier payement s'effectue un an après le jour de l'emprunt.

Trigonométrie et calcul logarithmique (3 heures).

1. Sur une droite AB comme base, on décrit trois triangles isoscèles ABC, ABC′, ABC″ dont les hauteurs sont respectivement $CD = \frac{1}{2}AB$, $C'D = AB$, $C''D = \frac{3}{2}AB$; démontrer que la somme des angles aux sommets $ACB + AC'B + AC''B$ vaut deux angles droits.

2. Dans le trapèze ABCD, on a

$$\left.\begin{matrix} AB = 2801^{m},87 \\ CD = 1925^{m},34 \end{matrix}\right\} \text{bases,} \qquad \left.\begin{matrix} AC = 1024^{m},448 \\ BD = 1227^{m},142 \end{matrix}\right\} \text{côtés.}$$

On demande de calculer les angles et la surface.

ÉCOLE NAVALE (CONCOURS DE 1886).

Arithmétique et Algèbre (3 heures et demie).

I. Calculer à un millième près le produit $\pi\sqrt{3}$.

II. Démontrer que, quel que soit le nombre entier n, la fraction décimale équivalente à la somme

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

est une fraction décimale périodique mixte.

III. Étant donné un triangle ABC quelconque, on trace le cercle inscrit, on mène à ce cercle la tangente B'C'; on trace le cercle inscrit du triangle A'B'C', on mène à ce cercle la tangente B''C'' parallèle à B'C', et ainsi de suite. Si l'on désigne respectivement par a, b, c les côtés BC, AC, AB du triangle ABC, par $2p$ son périmètre, par s et d la somme et la différence des côtés b et c, le rapport du rayon de l'un des cercles au rayon du cercle précédent est égal à $\frac{p-a}{p}$; on demande :

1° De démontrer que la limite vers laquelle tend la somme des surfaces des cercles a pour expression, à un facteur numérique près, $\frac{(s^2-a^2)(a^2-d^2)}{as}$.

2° De trouver les valeurs de a qui rendent cette ex-

pression maximum ou minimum, s et d restant constants, et de démontrer que la valeur qui correspond au maximum satisfait aux conditions géométriques du problème.

Calcul trigonométrique (1 heure).

I. Calculer la valeur de l'expression

$$\sqrt{\frac{0,0157^4 . \sin 22^\circ 17' 6''}{0,056437}}.$$

II. Calculer les angles x satisfaisant à l'équation

$$0,4235 \sin x + 0,1516 \cos x = 0,3818.$$

Géométrie descriptive (1 heure et demie).

Étant donnée une sphère tangente au plan horizontal, dans le premier dièdre, et dont les coordonnées du centre sont $o'\omega = 30^{mm}$, $o\omega = 42^{mm}$:

1° Construire les traces d'un plan qui coupe la sphère suivant un petit cercle de rayon donné, 20^{mm}, et qui fait avec le plan horizontal un angle donné, $40°$, et avec le plan vertical un angle donné, $60°$.

2° Construire les projections de l'intersection de ce plan et de la sphère.

Géométrie (3 heures et demie).

I. Mesure de la surface du triangle sphérique : définitions, énoncés, ordre et démonstration succincte des principales propositions qui conduisent à l'expression numérique de cette surface, lorsqu'on a spécifié les unités d'angle et de surface. Application numérique : calculer, sur une sphère dont le rayon est de $3^m,60$, l'aire du triangle sphérique dont les angles ont pour valeurs $A = 0,98$, $B = 1,50$, $C = 2,30$, quand on prend

pour unité d'angle l'angle dont l'arc est égal au rayon et pour unité de surface le centimètre carré.

II. O, O', O'' sont trois circonférences homothétiques directes ou inverses par rapport au même centre S; par ce point S, on mène une sécante quelconque SM; soient A et B ses points d'intersection avec la circonférence O, soit B' l'homologue sur la circonférence O' du point B, soit A'' l'homologue sur la circonférence O'' du point A. Démontrer que le produit AA''.BB' est constant et égal à LL''.LL', L, L' et L'' étant les points de contact des trois cercles avec la tangente commune issue de S; considérer en particulier le cas où les circonférences O', O'' coïncident, alors $AA'.BB' = \overline{LL'}^2$. Déduire de cette proposition que toutes les circonférences tangentes à deux circonférences données O', O'' ont, avec toute circonférence O homothétique à O' et à O'', une tangente commune interne ou externe, DE, de longueur constante.

Réciproquement : O et O' étant deux circonférences données et S leur centre de similitude directe ou inverse, le lieu du point P, déterminé sur chaque sécante SABA'B' par la condition $AA'.BP = k^2 =$ const., est une circonférence homothétique aux deux premières.

Plus généralement, le lieu des points P et Q, déterminés sur chaque sécante SAB par les conditions $AP.BQ = k^2$ et $A'P.B'Q = l^2$, se compose de deux circonférences, une pour chaque point, homothétiques aux deux premières.

Composition française (2 heures et demie).

Aux derniers jours de l'âge d'or, le Mensonge, surprenant la Vérité endormie, l'a dépouillée de sa robe blanche; il s'en est revêtu, et, sous cette parure, il se

fait accueillir et fêter partout. La corruption envahit le monde. La Vérité, ainsi dépouillée, est au contraire honnie et repoussée en tous lieux. Traitée de folle, accablée d'outrages, surtout à cause de sa nudité, elle s'enfuit dans un désert.

Là, au milieu d'un buisson, elle trouve les vêtements abandonnés par le Mensonge; elle s'en couvre, reparaît dans le monde sous le nom nouveau de Fable, et tous les hommes lui sourient.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1886.

PREMIÈRE SESSION, JUILLET 1886.

Géométrie analytique.

On donne une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et, dans son plan, un point P dont les coordonnées sont α et β, et l'on considère toutes les paraboles bitangentes à l'ellipse en des points tels que la corde des contacts passe par le point P :

1° Former l'équation générale de ces paraboles;

2° Montrer que, en général, par tout point Q du plan, passent deux des paraboles considérées, et reconnaître que les régions du plan, dans lesquelles doit se trouver le point Q pour que ces deux paraboles soient réelles, sont limitées par l'ellipse donnée et par une droite;

3° Trouver le lieu des positions que doit occuper le point Q pour que les axes des deux paraboles considérées qui passent par ce point soient rectangulaires;

4° Trouver le lieu du point de rencontre de l'axe de chacune des paraboles considérées avec la corde des contacts de cette parabole et de l'ellipse. L'équation de ce lieu est du quatrième degré; on transportera les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes, en prenant pour nouvelle origine le point P, et, cela fait, on montrera que l'équation de lieu peut être décomposée en deux équations de second degré.

Calcul trigonométrique.

Calculer les angles et la surface d'un triangle dont les trois côtés sont

$$a = 11727^{m},35, \qquad b = 28145^{m},64, \qquad c = 30491^{m},91.$$

Physique.

Un calorimètre de poids p, de chaleur spécifique c, contient un poids P d'un liquide de chaleur spécifique C; le vase et son contenu sont à une température inconnue x. On plonge dans le liquide un thermomètre à mercure portant une division centigrade; le degré n affleure au niveau du liquide du calorimètre et le poids réduit en eau de la portion utile du thermomètre est π; enfin la température indiquée par le thermomètre, qui était d'abord t dans l'air environnant, s'élève dans le liquide jusqu'à T. On demande :

1° De faire subir à cette lecture T la correction résultant de ce fait que le thermomètre est incomplètement plongé;

2° De calculer x en remarquant que le thermomètre soustrait ou abandonne de la chaleur au calorimètre (on suppose que les pertes ou les gains de chaleur par rayonnement et par conductibilité sont nuls).

Exemple numérique :

$p = 15^{gr},32$,	$c = 0,102$,	$n = 5^{\circ}$,
$P = 350$,	$C = 1$,	$t = 8,5$,
$\pi = 4,325$,		$T = 91,75$.

Coefficient de dilatation apparente du mercure dans le thermomètre : $m = \frac{1}{6480}$.

Chimie.

I. On demande de donner :

1° Les préparations de l'acide carbonique dans les laboratoires et dans l'industrie;

2° L'énumération sommaire de ses propriétés;

3° Son rôle au point de vue de la vie végétale et de la vie animale;

4° Sa composition.

II. On introduit dans un eudiomètre 100^{cc} de CO et 100^{cc} d'oxygène. Après le passage de l'étincelle, il reste dans l'eudiomètre 150^{cc} de gaz; une solution de KO, HO absorbe 100^{cc} de CO^2, et le résidu final, de 50^{cc}, est de l'oxygène. Déduire des données de cette expérience la composition de CO.

Les mesures des volumes sont faites sous la pression atmosphérique; on donne, en outre, la densité de $CO = 0,9674$ et celle de $O = 1,1056$.

Géométrie descriptive.

Intersection d'un cône et d'un cylindre.

On donne un triangle horizontal $(abc, a'b'c')$ à la cote $0^m,065$, rectangle en (a, a') et isoscèle, dont le côté $(ab, a'b')$ est perpendiculaire au plan vertical, et

dont les sommets (a, a'), (b, b') sont respectivement à $0^m,080$ et $0^m,140$ de ce plan. Le cône a pour directrice le cercle horizontal décrit de (b, b') comme centre avec ba pour rayon; son sommet, projeté horizontalement en c, a pour côté $0^m,102$. Le cylindre a pour directrice le cercle circonscrit au triangle $(abc, a'b'c')$ et pour direction de ses génératrices la droite qui joint le centre (o, o') de ce cercle au sommet (c, s') du cône.

On propose de construire les projections de la partie Σ, supposée opaque, du solide commun aux deux nappes du cône et au cylindre, comprise entre deux plans horizontaux, équidistants du plan du triangle donné, dont l'un est le plan horizontal de projection. Les parties du cylindre et du cône extérieures à Σ seront supposées enlevées.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celles des points et des droites remarquables. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Intersection d'un cône et d'un cylindre.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,230$ du petit côté inférieur, et les droites aa', cc' à égale distance des grands côtés de la feuille.

— - —

SECONDE SESSION, OCTOBRE 1886.

Géométrie analytique.

Soit un rectangle OACB dont les côtés $OA = a$ et $OB = b$, prolongés, sont pris, le premier pour axe

des x, le second pour axe des y. On considère toutes les coniques qui passent par les trois points O, A, B, et pour lesquelles la polaire du point C est parallèle à la droite AB.

1° Former l'équation générale de ces coniques. Trouver le lieu de leur centre, et, sur ce lieu, séparer les parties qui contiennent des centres d'ellipses de celles qui contiennent des centres d'hyperboles.

2° A chacune de ces coniques, on mène la normale au point A et la normale au point B ; trouver le lieu du point de rencontre de ces deux normales.

3° Soit Δ une quelconque des coniques considérées ; si, par le point C, on mène à cette conique des normales, on sait que les pieds de ces normales sont les points de rencontre de la conique Δ et d'une certaine hyperbole équilatère. Former l'équation de cette hyperbole équilatère, et chercher le lieu du centre de cette hyperbole, quand la conique Δ varie.

Calcul trigonométrique.

On donne, dans un triangle, deux côtés :

$$a = 23611^{\text{m}},25, \qquad b = 14237^{\text{m}},75$$

et l'angle compris

$$C = 63^\circ 26' 35'',5.$$

On demande de calculer les autres angles, le troisième côté et la surface du triangle.

Physique.

On donne un volume V de gaz humide, sa pression H, sa température T, son état hygrométrique e. On abaisse la température de ce gaz à t°, et l'on demande :

1° A quelle valeur v il faut en même temps réduire son volume pour que ce gaz soit alors exactement saturé de vapeur d'eau ;

2° Quelle est alors la nouvelle pression h du gaz.

Exemple numérique :

$V = 1^{mc}$, $H = 0^{m},766$, $T = 20°C.$, $e = 0,27329$, $t = 10°C.$

Coefficient de dilatation des gaz : 0,00367.

Forces élastiques maxima de la vapeur d'eau : $17^{mm},391$ à 20°; $9^{mm},165$ à 10°.

Chimie.

I. Méthodes analytiques et synthétiques employées pour établir la composition de l'eau.

II. On emploie l'hydrogène qui provient de l'action de $49^{gr},5$ de zinc pur sur de l'acide sulfurique en excès à réduire complètement 24^{gr} d'oxyde de fer, Fe^2O^3. Quel serait le volume de l'hydrogène non utilisé, mesuré sur la cuve à eau, à 18°C., sous une pression de 748^{mm} de mercure.

Équivalents en poids :

$Zn = 33$, $Fe = 28$, $H = 1$, $O = 8$.

Tension de la vapeur d'eau à 18° : $15^{mm},35$.
Coefficient de dilatation des gaz : 0,00367.
Poids du litre d'hydrogène à 0° et 760^{mm} : $0^{gr},089$.

Géométrie descriptive.

Intersection d'un cylindre de révolution et d'un cône.

On donne un triangle $os\sigma$ rectangle en s et isoscèle, situé dans le plan horizontal de projection, dont les sommets s, σ, les plus voisins du plan vertical, se trouvent sur une parallèle à la ligne de terre, à $0^{m},065$

de cette ligne et, respectivement, à $0^m,135$ et $0^m,170$ du bord gauche du cadre.

Le cylindre, situé dans le dièdre antérieur-supérieur, a pour projection horizontale de son axe la droite $s\sigma$ et touche les deux plans de projections.

Le cône a pour sommet le point de l'axe du cylindre projeté en s ; sa trace horizontale est une hyperbole équilatère ayant un sommet réel en σ, o pour centre et os pour une de ses asymptotes.

On demande de construire l'intersection des surfaces données, puis, après avoir enlevé le cylindre, de représenter la partie, supposée opaque, de la surface des deux nappes du cône intérieure au cylindre et comprise entre deux plans de profil placés à $0^m,125$ du point s.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celles des points et des droites remarquables. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Intersection d'un cône et d'un cylindre.

Prendre la ligne de terre perpendiculaire aux grands côtés du cadre et à égale distance des deux autres côtés.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (CONCOURS DE 1886).

Mathématiques.

1. Les trois côtés d'un triangle forment une progression arithmétique dont on donne la raison ; on connaît

le rapport m de la surface de ce triangle à celle du rectangle construit sur les deux plus petits côtés. Calculer les côtés de ce triangle ; discuter. Dans le cas particulier $m = \frac{1}{2}$, calculer le rayon du cercle inscrit dans le triangle.

2. On a un demi-cercle AOB, une droite AZ faisant avec AB un angle aigu donné α ; trouver sur AB un point C tel qu'en élevant par ce point une perpendiculaire à AB, on ait $CD + CE = l$.

Calcul trigonométrique.

Déterminer les valeurs de x comprises entre 0° et 180° qui satisfont à l'équation

$$b \tan 3x = a + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On fera $a = 42587,8$ et $b = 36723,7$.

Géométrie descriptive.

On donne un point A sur la ligne de terre, un point S distant du plan horizontal de 78^{mm}, du plan vertical de 51^{mm}, et du point A de 124^{mm}. Construire le tétraèdre SABC dont la base ABC est sur le plan horizontal de projection, sachant que le plan BSC est perpendiculaire à l'arête SA, et que les angles dièdres AB et AC valent chacun 68°. On aura soin de placer le point A le plus à gauche possible.

Construire l'intersection de cette pyramide avec le cylindre de révolution qui a SA pour axe et pour rayon 55^{mm}.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le tétraèdre est seul et que le solide commun au cylindre et à la pyramide est enlevé.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (PARIS, 1886).

On considère le système S des plans représentés par l'équation

$$\mu^3 + 3\mu^2 x + 3\mu y + z = 0,$$

dans laquelle μ désigne un paramètre variable. Les axes de coordonnées sont rectangulaires.

Soit M le plan de ce système pour lequel le paramètre μ a la valeur particulière m. Par chaque point A du plan M passent deux plans M', M'' du système S, autres que le plan M. Soient μ', μ'' les valeurs du paramètre μ relatives à ces deux plans. Suivant la région du plan M à laquelle appartient le point A, les nombres μ', μ'' sont réels ou imaginaires et comprennent entre eux le nombre m ou bien sont tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à lui ; distinguer ces diverses régions.

Trouver, dans le plan M, le lieu des points A tels que les deux plans M', M'' soient perpendiculaires entre eux. Trouver, dans l'espace, le lieu des points tels que deux des trois plans du système S qui passent par l'un quelconque d'entre eux soient perpendiculaires.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL (CONCOURS DE 1886).

Algèbre et Trigonométrie.

Soit, dans un plan, le pentagone ABCDE non convexe en A, où les angles BAE extérieur et BCD inté-

rieur sont supposés égaux. On donne leur grandeur commune θ, ainsi que les longueurs des côtés, savoir

$$AB = a, \qquad BC = CD = 2a, \qquad DE = 3a, \qquad EA = 4a.$$

Sur EA, à partir du point E, on porte une longueur EK égale à DE, et sur CD, à partir du point D, une longueur DH égale à la moitié de DE :

1° Calculer la différence $\overline{BE}^2 - \overline{BD}^2$ des carrés des distances du sommet B aux sommets E et D ;

2° Résoudre le quadrilatère DHKE ;

3° Les bissectrices des quatre angles de ce quadrilatère ont un point commun O : calculer le rayon de la circonférence qui, passant par les points D et O, a son centre sur le côté DE.

Effectuer numériquement la résolution du quadrilatère en supposant $a = 1$, $\theta = 109°46'38''$.

Géométrie descriptive.

On donne deux droites OA, OB se coupant en un point O, et telles que l'angle AOB soit aigu. On considère la surface conique engendrée par une droite OM qui tourne autour du point O en formant avec OA et OB des angles MOA et MOB complémentaires.

Représenter le solide limité par cette surface et par deux plans menés perpendiculairement aux deux droites à la même distance du sommet O.

On prendra l'un de ces plans pour plan horizontal de projection, et le plan des deux droites pour plan vertical. On supposera le solide éclairé par des rayons parallèles à la ligne de terre, et les ombres seront indiquées par des hachures.

Mécanique.

Une planche rectangulaire homogène AB de longueur l et de poids P peut tourner autour d'un de ses petits côtés fixé horizontalement contre un mur vertical AC. En un point B du côté opposé est attaché un fil BCAQ, de poids négligeable, qui, passant sur une très petite poulie C placée sur le mur à une distance h de la charnière, retombe verticalement en supportant un poids Q. Sur la planche repose un corps cubique d'arête a, qui s'appuie contre le mur par une arête. Ce cube n'est pas homogène, mais le poids spécifique varie proportionnellement au carré de la distance à la face de contact; il est égal à k à l'unité de distance. Les points B, C et les centres de gravité de la planche et du cube sont d'ailleurs dans un même plan vertical normal au mur.

On demande de calculer le poids Q qui produit l'équilibre, et aussi les réactions, connaissant l'angle $\text{BAC} = \alpha$ que fait la planche avec le mur. On fera abstraction des frottements, et l'on regardera le fil comme parfaitement flexible.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. le professeur Genese (University College, Aberystwyth, Wales).

Le joli théorème de M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales* 1886, p. 295), *une fois remarqué*, est évident, parce que l'élimination de y entre $x^2+y^2 = R^2$ et l'équation de la courbe du degré n nous donne, en général, une équation du degré $2n$ en x, et, *en considé-*

rant les dimensions, on voit que R^2 n'entre pas dans les termes en x^{2n}, x^{2n-1}.

Pour construire le point G (que je me permets de nommer *point de d'Ocagne*), le théorème nous permet de mettre $R = 0$, d'où $y = \pm x\sqrt{-1}$. Le signe positif nous donne n valeurs de x, le signe négatif encore n valeurs. Il s'ensuit que le point de d'Ocagne est déterminé par les termes des degrés n et $n-1$ dans l'équation de la courbe ; puis, *au lieu de la courbe, on peut se servir de ses asymptotes.*

Dans le cas des coniques, je trouve que ωG et la perpendiculaire ωN abaissée sur la polaire de ω sont également inclinées sur un axe de la conique.

BIBLIOGRAPHIE.

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE ; par M. *A. de Saint-Germain,* professeur à la Faculté des Sciences de Caen. In-8°. Paris, Gauthier-Villars ; 1887. Prix : 1fr,50.

Ce travail a pour but d'aider les candidats à la Licence et les personnes qui abordent l'étude de la Dynamique des corps solides à acquérir des notions suffisantes sur l'un des Chapitres les plus remarquables de la Dynamique. Après avoir rappelé quelques résultats de Cinématique, l'auteur établit rapidement les équations d'Euler et de M. Resal, puis il étudie le mouvement dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures, par l'Analyse d'abord, ensuite en s'aidant de considérations géométriques ; il conserve les mêmes notations et les mêmes conventions qui permettent de réduire le nombre des cas à discuter : il établit les équations de M. Darboux pour l'herpolhodie, donne une expression du rayon de courbure de cette ligne et indique la position relative des cônes qui roulent

l'un sur l'autre. Le dernier Chapitre est consacré au mouvement d'un solide pesant et de révolution autour d'un point de son axe; une considération géométrique simple rend compte du théorème de Jacobi pour le cas où l'ellipsoïde d'inertie du point fixe se réduit à une sphère. Cette question a donné lieu à d'importants travaux : l'auteur s'estimera heureux s'il a donné à ses lecteurs le désir de les connaître.

La Géométrie; par *René Descartes*. Nouvelle édition. Petit in-4° carré, avec figures et gravures intercalées dans le texte. Paris, A. Hermann; 1886. Prix : 5fr.

Peu de Livres ont autant contribué que la Géométrie de Descartes au progrès des Mathématiques. Aussi l'éditeur a-t-il cru rendre service à la Science en en publiant une nouvelle édition.

Sur quelques applications des fractions continues algébriques; par M. *C. Possé*, professeur à l'Université de Saint-Pétersbourg. Grand in-8° de 175 pages. Paris, A. Hermann; 1886. Prix : 5fr.

Propriétés fondamentales des réduites de la fraction continue provenant du développement de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(y)\,dy}{z-y}$. — Formule d'interpolation par la méthode des moindres carrés. — Représentation approchée des intégrales définies au moyen d'autres prises entre les mêmes limites. — Sur les fonctions analogues à celles de Legendre. — Calcul approximatif des intégrales. — Sur les valeurs limites des intégrales.

Étude analytique du déplacement infiniment petit d'un corps solide; par M. *A. Thévenet*, professeur à l'École supérieure des Sciences d'Alger. In-4° de IX-154 pages. Paris, A. Hermann; 1886. Prix : 6fr.

Déplacement infiniment petit d'un corps solide assujetti à cinq conditions, à quatre conditions, à trois conditions, à deux conditions.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS RÉSOLUBLES ALGÉBRIQUEMENT; par M. *Despeyrous*, ancien professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse. Grand in-8°. Paris, A. Hermann; 1887. Prix : 6fr.

L'objet du Mémoire de Despeyrous est de résoudre cette question générale : trouver toutes les équations de degré premier résolubles algébriquement. L'auteur pense avoir complètement atteint son but, et ses recherches se trouvent très clairement résumées en dix-sept théorèmes.

THÉORIE ET APPLICATIONS DES ÉQUIPOLLENCES; par M. *C.-A. Laisant*, député. In-8° de XVI-300 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1887. Prix : 7fr,50.

Comme l'indique le titre de cet Ouvrage, il se divise en deux parties : théorie, applications.

Dans la première, qui est fort courte, l'auteur a réuni et a exposé très clairement les principes essentiels de la méthode. A la rigueur, on peut dire qu'on la possède quand on a lu attentivement ces soixante pages.

Dans la seconde, l'auteur a cherché surtout à varier les applications, moins pour les solutions elles-mêmes qu'en vue de montrer les nombreuses ressources du calcul de Bellavitis et d'en rendre le maniement familier.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

LA PHOTOGRAPHIE DES OBJETS COLORÉS AVEC LEURS VALEURS RÉELLES; par le professeur Dr *H.-W. Vogel*. Traduit de l'allemand par *H. Gauthier-Villars*. In-8°, avec figures dans le texte et 3 planches, dont une en couleur. Paris, Gauthier-Villars; 1887. Prix : 6fr.

HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES; par M. *Maximilien Marie*, répétiteur de Mécanique et

examinateur d'admission à l'École Polytechnique. T. X et XI : de Laplace à Fourier et de Fourier à Arago. Petit in-8°. Paris, Gauthier-Villars; 1887. Prix du volume : 6^{fr}.

APPLICAZIONI GEOMETRICHE DEL CALCOLO INFINITESIMALE; per *Giuseppe Peano*, professore nella R. Accademia militare di Torino. Grand in-8° de XII-336 pages. Torino, fratelli Bocca; 1887. Prix : lire 10.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, à l'usage des candidats aux Écoles navale, centrale et forestière et des élèves de première année de la classe de Mathématiques spéciales; par M. *Ernest Dessenon*, professeur au Lycée Saint-Louis. In-8° de 396 pages. Paris, Hachette; 1887.

TRAITÉ D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE renfermant de nombreux développements sur les symboles et la théorie des variations du quadrinôme du troisième degré; par M. *P. de Campou*, professeur au collège Rollin. In-8° de 390 pages. Paris, A. Colin; 1887. Prix : 5^{fr}.

LE TROISIÈME LIVRE DE GÉOMÉTRIE, à l'usage de l'enseignement moyen et de l'enseignement normal. Théorie des médianes antiparallèles. Nouveau plan et nouvelles démonstrations; par M. *Clément Théry*, étudiant à la Faculté des Sciences de l'Université de Gand. Grand in-8° de 46 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1887. Prix : 1^{fr},25.

LA THÉORIE DE RAMEAU SUR LA MUSIQUE; par M. *Ch. Henry*. Grand in-8°, papier de Hollande. Paris, A. Hermann; 1887. Prix : 2^{fr}.

WRONSKI ET L'ESTHÉTIQUE MUSICALE; par M. *Ch. Henry*. Grand in-8°, papier de Hollande. Paris, A. Hermanu; 1887. Prix : 3^{fr}.

LES VOYAGES DE BALTHASAR DE MONCONYS. Documents pour l'Histoire de la Science, avec une introduction; par

M. *Ch. Henry*. In-4° de 110 pages. Paris, A. Hermann; 1887. Prix : 2^{fr},50.

Œuvres complètes d'Augustin Cauchy, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. 2e série, t. VI, in-4°. Paris, Gauthier-Villars; 1887. Prix : 25^{fr}.

Compléments d'Algèbre, suivis de nombreux exercices, à l'usage des candidats à l'École navale et à l'École forestière et des élèves du Cours préparatoire à la classe de Mathématiques spéciales; par M. *E. Jablonski*, professeur au lycée Charlemagne. Grand in-8° de VI-316 pages. Paris, Delalain frères; 1887.

Résumé de Géométrie analytique a deux et a trois dimensions, à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique, Normale, Centrale, des Ponts et Chaussées, des Mines, Forestière et Navale; par M. *A. Rémond*, professeur de Mathématiques spéciales à Sainte-Barbe. 2e édition. In-8° de 151 pages. Paris, Nony et Cie; 1887. Prix : 4^{fr}.

Tirages a part.

Bemerkung zu Hrn. Ernst Schering's Mittheilung; Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen; Ueber das Dirichlet'sche Integral; Ueber eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel; Zur Theorie der elliptischen Functionen; Ueber den Cauchy'schen Satz; Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen; Zur Theorie der elliptischen Functionen; von L. Kronecker. Extraits des *Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademieder Wissenschaften zu Berlin*; 1885 et 1886.

Sulle coniche bitangenti a due coniche; nota del

Dott. Federico Amodeo. Extrait du *Giornale di Matematiche*, t. XXIV; 1886.

Correspondance inédite de d'Alembert avec Cramer, Lesage, Clairaut, Turgot, Castillon, Beguelin, etc., avec Notice et Lettres inédites d'Euler à d'Alembert et *Lettres inédites de Lagrange*, et *Lettres inédites de Laplace publiées avec une première rédaction de sa méthode pour déterminer les orbites des comètes et une Notice sur les manuscrits de Pingré;* par M. Ch. Henry. Extraits du *Bollettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t. XVIII et XIX; 1885 et 1886.

Sur un théorème relatif à la théorie des nombres; par M. A. Schiappa Monteiro. Extrait de la *Revista scientifica do Porto;* 1885.

Sur la génération du conoïde circonscrit à une courbe plane au moyen de courbes du même ordre que celle-ci; note de M. A. Schiappa Monteiro. Extrait du *Jornal de Sciencias math. e astr.*, t. VIII; 1887.

Contribution à la théorie des fonctions; par M. Lerch. Extrait des *Comptes rendus de la Société royale des Sciences de Bohême;* 1886.

Nuova costruzione della superficie del quint'ordine dotata di curva doppia del quint'ordine; par M. Alfonso del Re. Extrait des *Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli;* 1886.

Des constantes d'élasticité dans les milieux anisotropes; par M. B. Élie. Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3e série, t. II; 1886.

Lettre à M. G. de Longchamps; par M. L. Maleyx. Extrait du *Journal de Mathématiques élémentaires;* 1887.

Sopra due punti della « Theorie der binären alge-

braischen Formen » del Clebsch; osservazioni di ENRICO D'OVIDIO. Extrait des *Atti delle R. Accademia delle Scienze di Torino,* t. XXII; 1887.

Annals of Mathematics, published by THE UNIVERSITY OF VIRGINIA. N° 2, vol. III; 1887.

Sur la rectification de la trisectrice de Maclaurin au moyen des intégrales elliptiques et *Rectification des cubiques circulaires, unicursales, droites, au moyen des intégrales elliptiques;* par M. G. DE LONGCHAMPS. Extraits des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CIV; 1887.

Sur certaine classe de suites récurrentes et *Sur les péninvariants des formes binaires;* par M. M. D'OCAGNE. Extraits des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CIV; 1887.

Sur les péninvariants des formes binaires; par M. R. PERRIN. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CIV; 1887.

ERRATA.

Tome V, 3ᵉ série.

Page 229, ligne 4 en remontant, *supprimez* la remarque.
Page 231, formule (14), *enlevez* les signes $\pm$.
Page 282, ligne 11 en remontant, *au lieu de* $\sqrt{1+x_1}$, *lisez* $\sqrt{1-x_1}$.
Page 283, dernière ligne, *au lieu de* z_1, *lisez* z_2.

Tome VI, 3ᵉ série.

Page 239, ligne 13, *après* Brocard, *ajoutez* du triangle de Brocard.

BRISSE (Ch.), Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet, Répétiteur de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique. — **Cours de Géométrie descriptive.**

I^{e} PARTIE, à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques élémentaires. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1882......... 5 fr.

IIe PARTIE, à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques spéciales. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1887............. 7 fr.

FAYE (H.). — **Sur les Tempêtes.** *Théories et discussions nouvelles.* Grand in-8, avec figures; 1887 .... 2 fr. 50 c.

JAMIN (J.), Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, et **BOUTY**, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours de Physique de l'École Polytechnique.** 3e édition, augmentée et entièrement refondue. 4 forts vol. in-8 de 3600 pages, avec 1450 figures dans le texte et 13 planches sur acier, dont 2 en couleur; 1879-1887. (*Autorisé par décision ministérielle.*) .... 70 fr.

On vend séparément :

TOME I. — 15 fr.

(*) 1er FASCICULE. — *Instruments de mesure; Hydrostatique,* avec 148 fig. dans le texte et 1 planche........................ 5 fr.

2e FASCICULE. — *Actions moléculaires;* avec 91 fig. dans le texte. 4 fr.

3e FASCICULE. — *Gravitation universelle; Électricité statique,* avec 110 figures dans le texte et 1 planche .... 6 fr.

TOME II. — CHALEUR. — 15 fr.

(*) 1er FASCICULE. — *Thermométrie; Dilatations;* avec 98 figures dans le texte .... 5 fr.

(*) 2e FASCICULE. — *Calorimétrie;* avec 48 figures dans le texte et 2 planches... 5 fr.

3e FASCICULE. — *Théorie mécanique de la Chaleur; Propagation de la Chaleur;* avec 47 figures dans le texte.................. 5 fr.

TOME III. — ACOUSTIQUE ; OPTIQUE. — 22 fr.

1er FASCICULE. — *Acoustique;* avec 123 figures dans le texte.... 4 fr.

(*) 2e FASCICULE. — *Optique géométrique,* avec 139 figures dans le texte et 3 planches.................................... 4 fr.

3e FASCICULE. — *Étude des radiations lumineuses, chimiques et calorifiques; Optique physique;* avec 249 figures dans le texte et 5 planches, dont 2 planches de spectres en couleur .... 14 fr.

TOME IV. — ÉLECTRICITÉ DYNAMIQUE ; MAGNÉTISME. — 20 fr.

1er FASCICULE. — *La pile; Phénomènes électrothermiques et électrochimiques;* avec 154 figures dans le texte..................... 6 fr.

2e FASCICULE. — *Les aimants; Magnétisme; Électromagnétisme; Induction;* avec 230 figures dans le texte et 1 planche........ 9 fr.

3e FASCICULE. — *Applications de l'électricité; Complément sur les principales découvertes faites pendant la publication de l'Ouvrage. Table générale par noms d'auteurs,* et *Table générale des matières par ordre alphabétique;* avec 55 figures dans le texte et 1 planche....... 5 fr.

(*) Les matières du programme d'admission à l'École Polytechnique sont comprises dans les parties suivantes de l'Ouvrage :
Tome I, 1er fascicule; Tome II, 1er et 2e fascicule; Tome III, 2e fascicule.

TABLE DES MATIÈRES.

Juin 1887.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE.

JUILLET 1887.

S'adresser, pour la rédaction,

à M. BRISSE, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine),
ou à M. ROUCHÉ, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

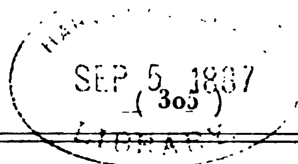
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1887

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Par application de la loi du 7 avril 1879, tous les bureaux de poste de France, d'Algérie, de Belgique, de Danemark, d'Italie, de Norvège, des Pays-Bas, de Suède et de Suisse sont autorisés à recevoir les abonnements. L'éditeur des *Nouvelles Annales de Mathématiques* prend à sa charge la remise perçue par l'Administration, et il suffit de verser à un bureau de poste, sans frais supplémentaires, le montant de l'abonnement (*Paris* : 15 fr. — *Départements et Union postale* : 17 fr. — *Autres pays* : 20 fr.)



REMARQUES SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ

[SUITE ET FIN (1)];

PAR M. H. LAURENT.

Jacobi a démontré que, si l'on avait n équations

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots, \quad f_n = a_n, \tag{1}$$

entre les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$, dans lesquelles $a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent des constantes arbitraires, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n$$

soit une différentielle exacte était donnée par les formules identiques

$$\begin{array}{llll}
(f_1, f_2) = 0, & (f_1, f_3) = 0, & \ldots, & (f_1, f_n) = 0, \\
 & (f_2, f_3) = 0, & \ldots, & (f_2, f_n) = 0, \\
 & & & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
 & & & (f_{n-1}, f_n) = 0.
\end{array}$$

Mais nous allons voir qu'il suffit que les formules écrites sur la première ligne soient satisfaites identiquement, que celles qui sont écrites sur la seconde le soient pour $x_1 = x_1^0$, que celles qui sont écrites sur la troisième le soient pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, etc. Le symbole (f_i, f_j) est d'ailleurs défini par la formule

$$(f_i, f_j) = \sum \frac{\partial(f_i, f_j)}{\partial(x_\mu, p_\mu)}.$$

Nous allons généraliser un peu ce théorème de Ja-

(1) Voir même Tome, p. 274.

cobi, ce qui nous servira un peu plus loin, et nous supposerons que les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ contiennent, outre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, une fonction u dont les dérivées relatives à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_n$; ainsi il s'agit de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$(2) \qquad du = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n$$

soit complètement intégrable, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignant les solutions des équations (1).

Les conditions d'intégrabilité complète de l'équation (2) sont données par la formule

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p_j}{\partial u} p_j = \frac{\partial p_j}{\partial x_i} + \frac{\partial p_j}{\partial u} p_i,$$

dans laquelle on doit supposer i et j égaux à 1, 2, 3, ..., n. Cette équation d'ailleurs peut s'écrire sous la forme plus simple

$$(3) \qquad \frac{dp_i}{dx_j} = \frac{dp_j}{dx_i},$$

le d étant employé pour désigner les dérivées totales prises en faisant varier u et en lui assignant pour dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_n$. On a, en adoptant cette notation,

$$\frac{df_i}{dx_\mu} + \frac{\partial f_i}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx_\mu} + \frac{\partial f_i}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dx_\mu} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dx_\mu} = 0,$$

$$\frac{df_j}{dx_\mu} + \frac{\partial f_j}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx_\mu} + \frac{\partial f_j}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dx_\mu} + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dx_\mu} = 0;$$

on conclut de là, en ajoutant ces deux équations après avoir multiplié la première par $\frac{\partial f_j}{\partial p_\mu}$ et la seconde par $-\frac{\partial f_i}{\partial p_\mu}$, puis en ajoutant les résultats obtenus et faisant

$\mu = 1, 2, \ldots, n,$

$$(4)\qquad \sum\left(\frac{df_i}{dx_\mu}\frac{\partial f_j}{\partial p_\mu} - \frac{df_j}{dx_\mu}\frac{\partial f_i}{\partial p_\mu}\right) = 0,$$

en tenant compte de la relation (3). Il n'y a presque rien à changer, comme l'on voit, à la démonstration que Jacobi a donnée de ses formules, et l'on démontre que les formules (4), nécessaires, sont suffisantes, par le procédé de Jacobi.

Nous admettrons donc que ces équations sont nécessaires et suffisantes pour que l'équation (2) soit complètement intégrable; nous poserons

$$\sum\left(\frac{df_i}{dx_\mu}\frac{\partial f_j}{\partial p_\mu} - \frac{df_j}{dx_\mu}\frac{\partial f_i}{\partial p_\mu}\right)$$
$$= \sum\left(\frac{df_i}{dx_\mu}\frac{df_j}{dp_\mu} - \frac{df_j}{dx_\mu}\frac{df_i}{dp_\mu}\right) = \{f_i, f_j\} = f_{ij}.$$

Il est facile de se convaincre alors que l'on a identiquement

$$(5)\qquad \{f_i, f_{jk}\} + \{f_j, f_{ki}\} + \{f_k, f_{ij}\} = 0;$$

c'est le théorème de Donkin généralisé. Cette équation (5) met en évidence ce fait important : si f_{ki} et f_{ij} sont nuls, on a

$$\{f_i, f_{jk}\} = 0;$$

f_{jk} est donc une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\sum\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} + p_\mu\frac{\partial f_i}{\partial u}\right)\frac{\partial V}{\partial p_\mu} - \left(\frac{\partial V}{\partial x_\mu} + p_\mu\frac{\partial V}{\partial u}\right)\frac{\partial f_i}{\partial p_\mu}\right] = 0.$$

Or cette équation est linéaire et homogène; si l'on assujettit une de ses intégrales à s'annuler pour $x_1 = x_1^0$, quels que soient $x_2, x_3, \ldots, x_n$, cette intégrale sera identiquement nulle; il résulte de là que, si

$$\{f_1, f_2\}, \quad \{f_1, f_3\}, \quad \ldots, \quad \{f_1, f_n\}$$

sont identiquement nuls et si, i et j étant différents de 1, on a

$$(6) \qquad \{f_i, f_j\} = 0$$

pour $x_1 = x_1^0$, quels que soient x_2, x_3, ..., x_n, les formules (6) seront identiques, et l'équation (2) sera complètement intégrable; on voit donc que les conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité complète de l'équation (2) sont que

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{f_1, f_2\} = 0, \quad \{f_1, f_3\} = 0, \quad \ldots, \quad \{f_1, f_n\} = 0, \\ \text{quels que soient } x_1, x_2, \ldots, x_n; \\ \qquad \{f_2, f_3\} = 0, \quad \ldots, \quad \{f_2, f_n\} = 0, \\ \text{pour } x_1 = x_1^0 \text{ quels que soient } x_2, \ldots, x_n; \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \qquad \{f_{n-1}, f_n\} = 0, \\ \text{pour } x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-1} = {}^0_{n-1} \text{ quel que soit } x_n. \end{array} \right.$$

On peut aussi dire que la condition nécessaire et suffisante pour que (2) soit complètement intégrable est que

$$\{f_1, f_2\} = 0, \quad \{f_1, f_3\} = 0, \quad \ldots, \quad \{f_1, f_n\} = 0,$$

identiquement, et que, en faisant $x_1 = x_1^0$,

$$du = p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + \ldots + p_n dx_n$$

soit complètement intégrable.

Comme l'on voit, les conditions d'intégrabilité peuvent se présenter sous une forme un peu plus simple qu'on ne le fait ordinairement; je vais montrer maintenant l'utilité des nouvelles conditions. Je suppose que l'on veuille intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f_1 = a_1;$$

on pourra, comme le fait Jacobi, chercher des fonctions

$f_2, f_3, \ldots, f_n$ satisfaisant aux conditions trouvées tout à l'heure; les équations

$$(7) \qquad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots, \quad f_n = a_n$$

feront alors connaître des valeurs $p_1, p_2, \ldots$, qui, portées dans (2),

$$du = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n,$$

rendront cette équation complètement intégrable, et par suite feront connaître u.

Occupons-nous d'abord des équations écrites sur la première ligne du tableau (6), $f_2, f_3, \ldots, f_{n-1}$ seront des intégrales distinctes de l'équation

$$(f_1, \mathrm{V}) = 0$$

ou

$$\sum \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} + p_\mu \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p_\mu} - \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_\mu} + p_\mu \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} \right) \frac{\partial f_1}{\partial p_\mu} \right] = 0,$$

ou encore des équations différentielles ordinaires

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial u}} &= \frac{dp_2}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial f_1}{du}} = \ldots \\ &= -\frac{dx_1}{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial p_1}\right)} = -\frac{dx_2}{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial p_2}\right)} = \ldots \\ &= -\frac{du}{p_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial p_1} + p_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial p_2} + \ldots + p_n \dfrac{\partial f_1}{\partial p_n}}. \end{aligned} \right.$$

Je suppose ces équations intégrées, on tirera les p des intégrales pour les porter dans

$$(9) \qquad du = \Sigma\, p\, dx,$$

équation qui intégrée donnera u. Toute la difficulté consiste à choisir convenablement, parmi les $2n$ intégrales des formules (8), celles qui fourniront les p. Or

remarquons que des équations (8) on tire

$$df_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad du = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n;$$

donc l'équation proposée $f_1 = a_1$ est une intégrale de (8) et l'équation (9) est implicitement contenue dans (8), circonstances qui facilitent un peu l'intégration des équations (8). Supposons ces équations intégrées de telle sorte que pour $x_1 = x_1^0$ on ait $x_2 = x_2^0, \ldots,$ $p_1 = p_1^0$, $p_2 = p_2^0$, $\ldots$, $u = u^0$; toutes ces constantes sont arbitraires, une seule exceptée, en ce sens qu'elles dépendent de a_1 : nous supposerons que cette constante soit p_1^0.

Appelons (E) le système des intégrales de (8) ainsi déterminé; posons

$$(10) \qquad \begin{cases} u^0 = \varpi(x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0), \\ p_2^0 = \dfrac{\partial\varpi}{\partial x_2^0}, \qquad p_3^0 = \dfrac{\partial\varpi}{\partial x_3^0}, \qquad \ldots. \end{cases}$$

Éliminons alors entre les équations (10) et (E) les p^0 et les x^0; nous aurons des équations d'où l'on pourra tirer les p et u en fonction des x; ces valeurs satisferont aux équations de la première ligne du tableau (6) et à l'équation (9); de plus, en vertu d'un théorème connu de Cauchy sur les intégrales des équations différentielles, u se réduira à $\varpi(x_2, \ldots, x_n)$ pour $x_1 = x_1^0$ et $p_1, p_2, \ldots$ aux dérivées de la fonction ϖ : toutes les conditions d'intégrabilité sont ainsi satisfaites d'elles-mêmes. On retrouve ainsi la méthode donnée par Cauchy pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Maintenant montrons comment notre principe permet de simplifier encore la méthode de Jacobi : bornons-nous au cas où la fonction f_1 ne contient pas u. Alors

il faut intégrer le système

$$
\begin{array}{lllll}
(1) & (f_1, f_2) = 0, & (f_1, f_3) = 0, & \ldots, & (f_1, f_n) = 0, \\
(2) & & (f_2, f_3) = 0, & \ldots, & (f_2, f_n) = 0, \\
\ldots & & & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
(n-1) & & & & (f_{n-1}, f_n) = 0.
\end{array}
$$

Pour y parvenir, on cherche une intégrale de l'équation $(f_1, V) = 0$; soit f_2 une intégrale de cette équation : on cherche ensuite une intégrale des équations simultanées

$$(f_1, V) = 0, \qquad (f_2, V)_0 = 0,$$

l'indice o indiquant que l'on doit faire $x_1 = x_1^0$. Soit f_3 cette intégrale, elle existe puisque $(f_1, f_2) = 0$; on a donc une fonction V satisfaisant à $(f_1, V) = 0$ et à $(f_2, V) = 0$, et par suite à $(f_2, V)_0 = 0$; on cherche ensuite une intégrale commune à

$$(f_1, V) = 0, \qquad (f_2, V)_0 = 0, \qquad (f_3, V)_{00} = 0,$$

et ainsi de suite.

Bien entendu, pour que l'on puisse appliquer cette méthode, il faut que (f_2, V) ne contienne pas $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ dont le coefficient est $\frac{\partial f_2}{\partial p_1}$, et qui sera nul si l'on a eu soin d'éliminer p_1 de f_2 au moyen de $f_1 = a_1$; de même (f_3, V) ne devra pas contenir $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial V}{\partial x_2}$, etc.

SUR LES POLYNOMES QUI EXPRIMENT LA SOMME DES PUISSANCES $p^{\text{ièmes}}$ DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

PAR M. P. APPELL,
professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Nous commencerons par résoudre un problème d'Algèbre auquel se rattache bien simplement, comme nous le montrerons, la détermination de la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des n premiers nombres entiers.

1. *Former un polynôme en x, $\varphi_p(x)$, qui s'annule pour $x = 0$ et qui vérifie l'identité*

$$\varphi_p(x) - \varphi_p(x-1) = x^p, \tag{1}$$

p désignant un entier positif ou nul.

Tout d'abord ce polynôme $\varphi_p(x)$ est nécessairement du degré $p+1$; car, en supposant $\varphi_p(x)$ de degré k, on obtient, pour la différence

$$\varphi_p(x) - \varphi_p(x-1),$$

un polynôme de degré $k-1$, et, comme cette différence doit être x^p, c'est-à-dire être de degré p, on doit avoir $k-1 = p$, $k = p+1$. Posons donc

$$\varphi_p(x) = A_0 x^{p+1} + A_1 x^p + A_2 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x^2 + A_p x,$$

sans mettre de terme constant, puisque le polynôme doit

s'annuler avec x. Nous aurons

$$\begin{aligned}\varphi_p(x-1) = A_0 x^{p+1} &+ \left[A_1 - \frac{p+1}{1} A_0\right] x^p \\ &+ \left[A_2 - \frac{p}{1} A_1 + \frac{(p+1)p}{1.2} A_0\right] x^{p-1} \\ &+ \left[A_3 - \frac{p-1}{1} A_2 + \frac{p(p-1)}{1.2} A_1 \right. \\ &\qquad \left. - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3} A_0\right] x^{p-2} + \ldots \\ &+ [A_p - 2A_{p-1} + 3A_{p-2} - \ldots + (-1)^p (p+1) A_0] x \\ &\qquad - A_p + A_{p-1} - A_{p-2} + \ldots + (-1)^{p+1} A_0.\end{aligned}$$

Pour écrire que la différence $\varphi_p(x) - \varphi_p(x-1)$ est identique à x^p, il faudra égaler à 1 le coefficient de x^p dans cette différence et à 0 tous les autres coefficients : on a ainsi les équations

$$\begin{aligned}(p+1) A_0 &= 1, \\ \frac{p}{1} A_1 - \frac{(p+1)p}{1.2} A_0 &= 0, \\ \frac{p-1}{1} A_2 - \frac{p(p-1)}{1.2} A_1 + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3} A_0 &= 0, \\ 2A_{p-1} - 3A_{p-2} + 4A_{p-3} + \ldots - (-1)^p (p+1) A_0 &= 0, \\ A_p - A_{p-1} + A_{p-2} + \ldots + (-1)^p A_0 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\end{aligned}$$

qui déterminent tous les coefficients de proche en proche. La première de ces équations donne

$$A_0 = \frac{1}{p+1},$$

la seconde donne ensuite $A_1 = \frac{1}{2}$, la troisième $A_2 = \frac{p}{12}$ et ainsi de suite, la dernière A_p.

Le polynôme cherché $\varphi_p(x)$ vérifiant l'identité (1) et s'annulant avec x est ainsi complètement déterminé.

On trouve sans peine, en faisant successivement $p = 0, 1, 2, 3,$

$$\varphi_0(x) = x,$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x^2 + x}{2} = \frac{x(x+1)}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2(x+1)^2}{4}.$$

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Bernoulli.*

2. *La valeur que prend le polynôme $\varphi_p(x)$ pour une valeur entière positive n attribuée à x est égale à la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers.*

En effet, si, dans l'identité (1), nous faisons successivement $x = 1, 2, 3, \ldots n$, nous obtenons les relations

$$\begin{aligned} \varphi_p(1) - \varphi_p(0) &= 1^p, \\ \varphi_p(2) - \varphi_p(1) &= 2^p, \\ \varphi_p(3) - \varphi_p(2) &= 3^p, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_p(n) - \varphi_p(n-1) &= n^p, \end{aligned}$$

qui, ajoutées membre à membre, donnent

$$\varphi_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p,$$

puisque $\varphi_p(0) = 0$.

Par exemple, la somme des carrés des n premiers nombres entiers est

$$\varphi_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. De l'identité

$$(1) \qquad \varphi_p(x) - \varphi_p(x-1) = x^p$$

se déduisent immédiatement quelques autres propriétés

des polynômes $\varphi_p(x)$. D'abord, en supposant l'entier p plus grand que zéro et faisant $x = 0$, on a

$$\varphi_p(-1) = 0;$$

donc *tous les polynômes* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., *s'annulent pour* $x = -1$.

Changeons ensuite, dans l'identité (1), x en $-x$, nous aurons

$$\varphi_p(-x) - \varphi_p(-x-1) = (-1)^p x^p,$$

ou

$$(2) \qquad \psi_p(x) - \psi_p(x-1) = x^p$$

en posant

$$\psi_p(x) = (-1)^{p+1} \varphi_p(-x-1),$$

La fonction $\psi_p(x)$ est un polynôme de degré $(p+1)$ en x s'annulant pour $x = 0$, car

$$\psi_p(0) = (-1)^{p+1} \varphi_p(-1) = 0;$$

cette fonction $\psi_p(x)$ vérifie en outre l'identité (2) qui est la même que l'identité (1). Donc le polynôme $\psi_p(x)$ possède les propriétés caractéristiques du polynôme $\varphi_p(x)$; d'où il suit que ces deux polynômes sont identiques, c'est-à-dire que l'on a

$$(3) \qquad \varphi_p(x) = (-1)^{p+1} \varphi_p(-x-1),$$

p étant supérieur à 0. Il sera facile de vérifier cette relation (3) sur les polynômes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ dont nous avons donné précédemment les expressions.

L'équation (3) conduit au théorème suivant :

Si l'on fait $x = y - \frac{1}{2}$, *le polynôme* $\varphi_p(x)$ *contient uniquement des puissances paires de* y, *si* p *est impair, et des puissances impaires de* y, *si* p *est pair.*

En effet, la substitution $x = y - \frac{1}{2}$ transforme la rela-

tion (3) en celle-ci :

$$\varphi_p(y-\tfrac{1}{2}) = (-1)^{p+1}\varphi_p(-y-\tfrac{1}{2});$$

le polynôme $\varphi_p(y-\frac{1}{2})$ change donc de signe avec y si p est pair, et ne change pas quand y change de signe si p est impair, ce qui démontre le théorème.

Par exemple,

$$\varphi_1(y-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(y^2-\tfrac{1}{4}),$$
$$\varphi_2(y-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{6}y(y^2-\tfrac{1}{4}).$$

Il résulte de là que, si l'entier p est pair et différent de zéro, le polynôme $\varphi_p(y-\frac{1}{2})$ s'annule pour $y=0$, c'est-à-dire que le polynôme $\varphi_p(x)$ s'annule pour $x=-\frac{1}{2}$, proposition qui se vérifie immédiatement par le polynôme $\varphi_2(x)$.

4. Prenons les dérivées des deux membres de l'identité (1) : nous aurons

$$(4) \qquad \varphi'_p(x) - \varphi'_p(x-1) = px^{p-1};$$

si l'on change, dans cette relation, p en $p+1$ et si l'on pose

$$\varpi_p(x) = \frac{1}{p+1}[\varphi'_{p+1}(x) - \varphi'_{p+1}(0)],$$

on voit que le polynôme $\varpi_p(x)$ est du degré $(p+1)$, s'annule avec x et vérifie l'identité

$$\varpi_p(x) - \varpi_p(x-1) = x^p,$$

identique à l'identité (1). Donc le polynôme $\varpi_p(x)$ est identique au polynôme $\varphi_p(x)$, et l'on a

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{p+1}[\varphi'_{p+1}(x) - \varphi'_{p+1}(0)],$$

ou encore

$$(5) \qquad \varphi'_{p+1}(x) = \varphi'_{p+1}(0) + (p+1)\varphi_p(x).$$

Cette relation (5) permet de calculer les polynômes $\varphi_p(x)$ de proche en proche. Elle donne, en effet, par l'intégration entre les limites o et x,

$$\varphi_{p+1}(x) = x\varphi'_{p+1}(0) + (p+1)\int_0^x \varphi_p(x)\,dx;$$

pour éliminer la constante inconnue $\varphi'_{p+1}(0)$, faisons $x = -1$; alors $\varphi_{p+1}(x)$ s'annule et l'on obtient

$$\varphi'_{p+1}(0) = (p+1)\int_0^{-1} \varphi_p(x)\,dx,$$

donc enfin

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi_{p+1}(x) = (p+1)x\displaystyle\int_0^{-1} \varphi_p(x)\,dx \\ \qquad\qquad + (p+1)\displaystyle\int_0^x \varphi_p(x)\,dx; \end{cases}$$

relation qui permet de former $\varphi_{p+1}(x)$ quand on connaît $\varphi_p(x)$.

Ainsi, en partant de $p = 0$, $\varphi_0(x) = x$, on a

$$\varphi_1(x) = x\int_0^{-1} x\,dx + \int_0^x x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_2(x) = 2x\int_0^{-1}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)dx + 2\int_0^x \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)dx$$
$$= \frac{x}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

5. Étant donné un polynôme $P(x)$ de degré $p+1$, on peut se proposer de mettre ce polynôme sous la forme

$$(7)\quad \begin{cases} P(x) = \lambda_0 + \lambda_1\varphi_0(x) + \lambda_2\varphi_1(x) \\ \qquad\qquad + \lambda_3\varphi_2(x) + \ldots + \lambda_{p+1}\varphi_p(x), \end{cases}$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ désignant des constantes convenables: en d'autres termes, on peut se proposer d'or-

donner ce polynôme suivant la série des polynômes $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$.

En admettant que le polynôme $P(x)$ puisse se mettre sous la forme (7), il est aisé de trouver les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$. D'abord, en faisant $x = 0$, on trouve $\lambda_0 = P(0)$; puis, en formant la différence $P(x) - P(x-1)$, on a, d'après la propriété fondamentale des polynômes $\varphi_p(x)$,

$$(8) \quad P(x) - P(x-1) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \ldots + \lambda_{p+1} x^p:$$

la formule de Taylor donne

$$P(x) = P(0) + \frac{x}{1} P'(0) + \frac{x^2}{1.2} P''(0) + \ldots + \frac{x^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} P^{(p+1)}(0),$$

$$P(x-1) = P(-1) + \frac{x}{1} P'(-1) + \frac{x^2}{1.2} P''(-1) + \ldots + \frac{x^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} P^{(p+1)}(-1);$$

on a donc, en identifiant les deux membres de la relation (8),

$$\lambda_1 = P(0) - P(-1),$$
$$\lambda_2 = P'(0) - P'(-1),$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{1.2}[P''(0) - P''(-1)],$$
$$\lambda_{p+1} = \frac{1}{1.2\ldots p}[P^{(p)}(0) - P^{(p)}(-1)].$$

Telles sont donc les valeurs des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$. Il est maintenant facile de vérifier que, si l'on donne à ces coefficients les valeurs que nous venons de trouver, le polynôme ainsi obtenu

$$Q(x) = P(0) + [P(0) - P(-1)]\varphi_0(x) + [P'(0) - P'(-1)]\varphi_1(x) + \frac{1}{1.2}[P''(0) - P''(-1)]\varphi_2(x) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots p}[P^{(p)}(0) - P^{(p)}(-1)]\varphi_p(x)$$

est bien identique au polynôme donné $P(x)$. Il suffit pour cela de remarquer que, d'après la détermination même des coefficients, on a identiquement

$$P(x) - P(x-1) = Q(x) - Q(x-1)$$

ou

$$P(x) - Q(x) = P(x-1) - Q(x-1).$$

La différence $P(x) - Q(x)$ est donc un polynôme qui s'annule pour $x = 0$ et qui ne change pas quand on change x en $x - 1$: cette différence est donc nulle identiquement.

Par exemple, si l'on fait successivement

$$P(x) = (x+1)^{p+1} \qquad \text{et} \qquad P(x) = x^{p+1},$$

on trouve les deux développements suivants

$$(x+1)^{p+1} = 1 + \varphi_0(x) + \frac{p+1}{1}\varphi_1(x) + \frac{(p+1)p}{1.2}\varphi_2(x) + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\varphi_3(x) + \ldots + \frac{p+1}{1}\varphi_p(x),$$

$$x^{p+1} = (-1)^p \left[\varphi_0(x) - \frac{p+1}{1}\varphi_1(x) + \frac{(p+1)p}{1.2}\varphi_2(x) + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\varphi_3(x) + \ldots + (-1)^p \frac{p+1}{1}\varphi_p(x)\right].$$

6. Pour ne pas être trop long, nous nous bornerons à énoncer les résultats suivants, en laissant aux lecteurs le soin de les démontrer :

1° *Le développement de la fonction*

$$F(h) = \frac{e^{h(x+1)} - 1}{e^h - 1},$$

en série ordonnée suivant les puissances croissantes de h, *est*

$$1 + \varphi_0(x) + \frac{h}{1}\varphi_1(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi_2(x) + \ldots + \frac{h^p}{1.2\ldots p}\varphi_p(1) + \ldots.$$

On montrera sans peine que le coefficient de $\frac{h^p}{1.2\ldots p}$, dans le développement de $F(h)$ est un polynôme en x s'annulant avec x et vérifiant l'identité (1).

2° *La constante* $\varphi'_p(0)$ *est nulle quand* p *est pair et supérieur à* 2.

3° *Les polynômes*

$$f_p(x) = \varphi_p(x) - \frac{1}{p}\varphi'_p(0)$$

[qui ne diffèrent des polynômes $\varphi_p(x)$ que par une constante] *possèdent la propriété suivante :*

$$\frac{df_p(x)}{dx} = pf_{p-1}(x).$$

Ces polynômes $f_p(x)$ *forment, à une fonction numérique près, les coefficients des puissances de* h *dans le développement en série de* $\frac{he^{h(x+1)}}{e^h - 1}$.

4° *La fonction* $\frac{1}{z-x}$, *dans laquelle* z *désigne une quantité quelconque réelle ou imaginaire et* x *un entier positif ou négatif inférieur en valeur absolue à celui des modules de* z *et de* $z+1$ *qui est le plus petit, peut être représentée par la série*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} &+ \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)\varphi_0(x) \\ &+ \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+1)^2}\right]\varphi_1(x) \\ &+ \left[\frac{1}{z^3} - \frac{1}{(z+1)^3}\right]\varphi_2(x) + \ldots.\end{aligned}$$

Cette série est-elle convergente pour d'autres valeurs de x?

Il serait intéressant de déterminer d'une manière générale le reste de la série précédente, car le théorème de Cauchy permet de rattacher au développement

de $\frac{1}{z-x}$ celui d'une fonction analytique quelconque $f(x)$. Mais cette étude nous entraînerait hors du domaine élémentaire sur lequel nous nous sommes placés.

Nous renverrons le lecteur désireux d'approfondir la théorie des polynômes $\varphi_p(x)$ à un Mémoire de Raale publié dans le Tome 42 du *Journal de Crelle,* à un Mémoire de M. Hermite publié dans le Tome 79 du même journal, au *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, et enfin au livre de M. Tannery *Sur la théorie des fonctions,* p. 150.

SUR LES FOYERS DES SECTIONS PLANES D'UNE QUADRIQUE (¹);

PAR M. DROUET,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée Janson.

1. M. Salmon, dans son *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* (traduction Chemin, p. 295), parvient, par une méthode fort savante, à une règle simple pour former l'équation tangentielle des foyers d'une section plane d'un ellipsoïde ; nous nous proposons ici de déduire cette règle d'une propriété élémentaire des foyers d'une conique.

Nous supposerons l'ellipsoïde rapporté à ses axes de symétrie, et le plan de la section passant par le centre.

Soit

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - h^2 = 0$$

l'équation tangentielle de l'ellipsoïde, et soient

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad 0$$

les coordonnées du plan sécant.

(¹) *Voir* 2ᵉ série ; t. III, p. 481.

On obtient une première forme de l'équation tangentielle de la section en écrivant que le produit des distances des deux foyers à une tangente est égal au carré de l'un des demi-axes. Si l'on considère un plan P (u, v, w, h) passant par une tangente, la distance du foyer à cette tangente peut s'obtenir en multipliant la distance du même foyer au plan P par $\sin\theta$, θ étant l'angle du plan P et du plan sécant. On trouve ainsi, en désignant par x_1, y_1, z_1 et $-x_1$, $-y_1$, $-z_1$, les coordonnées des foyers et par S le carré du demi-axe correspondant, l'équation

$$-\frac{(ux_1+vy_1+wz_1)^2+h^2}{u^2+v^2+w^2} = S\left[1-\frac{(\alpha u+\beta v+\gamma w)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(u^2+v^2+w^2)}\right]$$

ou encore

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(ux_1+vy_1+wz_1)^2-h^2\\ &\qquad+S\left[u^2+v^2+w^2-\frac{(\alpha u+\beta v+\gamma w)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Pour obtenir une seconde forme de l'équation tangentielle de la section, nous écrirons que les deux plans tangents menés à l'ellipsoïde par une droite tangente à la section sont confondus. En considérant cette droite comme l'intersection du plan sécant $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ et du plan (u, v, w, h), nous trouvons la condition

$$(2)\quad a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-h^2-\frac{(a^2\alpha u+b^2\beta v+c^2\gamma w)^2}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}=0.$$

Cela posé, si nous écrivons que les équations (1) et (2) représentent une même conique, nous sommes conduits à l'identité

$$(3)\qquad f-S\varphi = P^2-h^2,$$

où P^2-h^2 est le premier membre de l'équation tangen-

tielle des foyers, c'est-à-dire l'équation cherchée; d'ailleurs f est le premier membre de l'équation (2) de la section, et φ désigne l'expression

$$(4)\qquad \frac{(u^2+v^2+w^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha u+\beta v+\gamma w)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2};$$

enfin S représente le carré d'un des demi-axes, et par suite est, comme on le sait, une racine de l'équation

$$(5)\qquad \frac{a^2\alpha^2}{a^2-S}+\frac{b^2\beta^2}{b^2-S}+\frac{c^2\gamma^2}{c^2-S}=0;$$

on retrouverait cette équation en écrivant que le discriminant de $f-S\varphi$ est nul.

On voit donc que, *pour obtenir les foyers d'une section plane d'un ellipsoïde, il suffit de considérer les coniques évanouissantes du faisceau tangentiel*

$$f-S\varphi=0,$$

$f=0$ *étant l'équation de la section, et* $\varphi=0$ *l'équation des points où la conique* $u^2+v^2+w^2=0$ *est rencontrée par le plan sécant*. C'est la règle donnée par M. Salmon.

2. On serait encore conduit à l'identité (3) si l'on cherchait à déterminer les foyers en les considérant comme formant la trace d'une focale de la section sur le plan de cette section (Pruvost, *Leçons de Géométrie analytique,* t. II, p. 416).

Pour le vérifier, posons

$$\psi(u,v,w,h)=f-S(u^2+v^2+w^2),$$

S désignant une racine de l'équation (5).

ψ est le premier membre de l'équation d'une focale et les points où cette focale est rencontrée par le plan

$(\alpha, \beta, \gamma, o)$ ont pour équation tangentielle

$$4\psi(u, v, w, h)\psi(\alpha, \beta, \gamma, o) - (u\psi'_\alpha + v\psi'_\beta + w\psi'_\gamma)^2 = o$$

mais, comme

$$f(\alpha, \beta, \gamma, o) = o \qquad \text{et} \qquad \psi(\alpha, \beta, \gamma, o) = - S(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

le premier membre de l'équation précédente, divisé par un facteur numérique, peut s'écrire

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - h^2 - \frac{(a^2\alpha u + b^2\beta v + c^2\gamma w)^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}$$
$$- S\left[u^2 + v^2 + w^2 - \frac{(\alpha u + \beta v + \gamma w)^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\right],$$

et l'on reconnaît le premier membre de l'identité (3).

3. On peut aisément trouver les équations qui déterminent les coordonnées cartésiennes d'un foyer d'une section plane d'un ellipsoïde, en s'aidant de la remarque géométrique suivante :

Si l'on considère un cône passant par l'intersection de deux surfaces du second ordre, un plan tangent à ce cône coupe les deux surfaces suivant deux coniques bitangentes.

D'après cela, si l'ellipsoïde et le plan sécant sont donnés par les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = o,$$

$$\text{(P)} \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = o,$$

et si x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées d'un point du plan P, pour écrire que ce point est foyer de la section, il suffit d'exprimer que l'équation

$$(\Gamma) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) \\ \quad - [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2] = o \end{array} \right.$$

représente un cône tangent au plan (P).

Si l'on exprime successivement les conditions qui doivent être remplies :

1° Pour que l'équation (Γ) représente un cône;

2° Pour que le cône (Γ) ait son centre sur le plan (P);

3° Pour que le cône parallèle à Γ ayant pour sommet l'origine admette comme plan tangent un plan parallèle à (P);

4° Pour que le point (x_1, y_1, z_1) soit dans le plan P;
on trouve les équations cherchées

$$\frac{x_1^2}{a^2-S}+\frac{y_1^2}{b^2-S}+\frac{z_1^2}{c^2-S}-1=0, \tag{1}$$

$$\frac{\alpha x_1}{a^2-S}+\frac{\beta y_1}{b^2-S}+\frac{\gamma z_1}{c^2-S}=0, \tag{2}$$

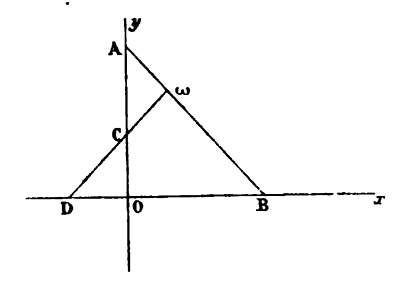
$$\frac{a^2\alpha^2}{a^2-S}+\frac{b^2\beta^2}{b^2-S}+\frac{\gamma^2 z^2}{c^2-S}=0, \tag{3}$$

$$\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1+\delta=0. \tag{4}$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1887).

Composition de Mathématiques.

On donne dans un plan un point ω fixe, et deux axes



rectangulaires fixes Ox, Oy. Par le point ω on fait passer

deux droites rectangulaires rencontrant Ox en B et D, Oy en A et C. Par les points A, B, on fait passer une parabole P tangente aux axes Ox et Oy en ces points ; par les points C, D, on fait passer une parabole P′ tangente aux axes Ox et Oy en ces points.

On fait tourner les droites rectangulaires AB, CD autour du point ω, et l'on demande :

1° Les équations des paraboles P, P′ de leurs axes et de leurs directrices ;

2° L'équation du lieu du point de concours des axes et des directrices;

3° L'équation du lieu du point de concours de leurs axes, qui se compose de deux cercles;

4° On prouvera que la distance des foyers est constante.

Composition de Géométrie descriptive.

D'un quart de tore supposé plein on enlève la portion comprise à l'intérieur d'un cône donné. Représenter, par ses projections, le solide ainsi obtenu.

L'axe du tore est vertical. Le plan de front et le plan de profil de cet axe limitent le quart de tore, lequel est situé en avant du premier plan et à droite du second.

Le cône a son sommet sur l'axe du tore. Pour définir sa directrice, imaginons la sphère dont un grand cercle coïncide avec le cercle de front qui limite le quart de tore; prenons, par rapport à cette sphère, le plan polaire du sommet du cône; enfin menons, à égale distance de ce plan et du sommet du cône, un second plan parallèle au premier : ce second plan coupera le quart de tore suivant la directrice qu'il s'agissait d'indiquer.

Le rayon du cercle générateur du tore sera de $0^{m},08$.
La distance du centre de ce cercle à l'axe sera de $0^{m},17$.

La hauteur du sommet du cône au-dessus du centre du tore sera de $0^m,04$.

La projection horizontale du centre du tore sera à $0^m,04$ et la projection verticale à $0^m,13$ au-dessus du centre du cadre, sur la parallèle aux grands côtés menée à $0^m,12$ à gauche de ce point.

En dehors des constructions relatives aux points remarquables, on ne laissera subsister, dans le tracé à l'encre, que celles qui se rapportent à la détermination d'un point de chaque courbe et de la tangente en ce point.

Calcul trigonométrique.

On donne dans un triangle deux côtés et l'angle compris :

$$a = 52837^m,23, \qquad b = 45609^m,07, \qquad C = 55^\circ 17' 48'',37.$$

Calculer les deux angles A et B, le troisième côté c, et la surface.

Composition de Physique et de Chimie.

Physique. — I. Lunette de Galilée. — II. Mesure de la chaleur spécifique d'un solide.

Chimie. — Les acides hydrogénés de la famille du chlore. — On insistera sur les caractères qui les rapprochent et qui les distinguent.

Lavis.

Faire à l'encre de chine, à teintes plates, le lavis d'une sphère (dépolie, ou mi-polie, à volonté) se détachant sur un fond gris; dégradé de haut en bas.

La sphère sera éclairée par le rayon ordinaire à 45°.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1887).

Mathématiques.

On considère la surface (dite *cylindroïde*) qui, rapportée à des axes rectangulaires, a pour équation

$$z(x^2+y^2)-m(x^2-y^2)=0.$$

Soit M un point de l'espace, dont les coordonnées sont x', y', z'; on propose de mener de ce point des normales au cylindroïde :

1° Désignant par α, β, γ les coordonnées du pied de l'une quelconque des normales abaissées du point M sur le cylindroïde, on formera l'équation du quatrième degré (I) ayant pour racines les valeurs de $\frac{\beta}{\alpha}$, l'équation (II) ayant pour racines les valeurs de γ, et l'on montrera comment, des racines de l'une ou de l'autre de ces équations, on déduirait les coordonnées des pieds des normales cherchées.

2° Sur quel lieu doit se trouver le point M pour que l'équation (I) soit réciproque? Trouver, en supposant le point M situé sur ce lieu, les coordonnées des pieds des normales.

3° Sur quel lieu doit se trouver le point M pour que l'équation (II) ait une racine double égale à z'? En supposant le point M situé sur ce lieu, reconnaître si les racines de l'équation (II), différentes de z', sont réelles ou imaginaires.

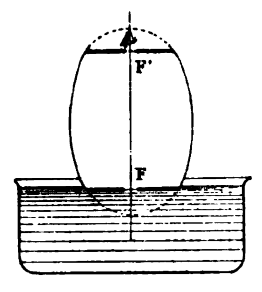
4° Que représente l'équation (II) quand on y regarde

l'inconnue comme une constante et x', y', z' comme les coordonnées d'un point variable?

Physique.

1° Chaleurs spécifiques des gaz.

2° Un ellipsoïde de révolution allongé, en verre, est coupé par deux plans normaux à l'axe de révolution et passant par les foyers F, F' de l'ellipse méridienne. Les faces planes sont noircies sur toute leur étendue, sauf



un très petit cercle central. Le petit cercle F seul éclairé reçoit de la lumière dans toutes les directions.

On demande de *décrire* succinctement :

1° Ce que voit un observateur dont l'œil est placé en F';

2° Comment le phénomène dépend du rapport des axes de l'ellipse méridienne;

3° Comment il dépend de l'indice moyen de l'ellipsoïde;

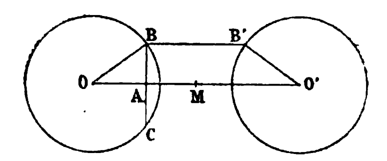
4° S'il y a des colorations dues à la dispersion et comment elles sont distribuées;

5° Comment le phénomène est modifié quand on plonge la face F dans l'eau d'une capsule éclairée en tous sens.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (1887).

Arithmétique et Algèbre.

I. De deux points O et O′ situés à une distance OO′ égale à $2a$ comme centres, on trace deux circonférences égales



de rayon R. A partir du point M milieu de OO′ et dans le sens MO, on porte une longueur MA égale à x; et au point A, on mène à la circonférence O la corde BC perpendiculaire à OO′; on joint OB et l'on achève le trapèze isoscèle OBB′O′.

On demande : 1° de trouver l'expression du volume engendré par la révolution du trapèze OBB′O′ autour de OO′. On examinera l'interprétation dont cette expression est susceptible pour les valeurs négatives de x lorsque les deux circonférences se coupent;

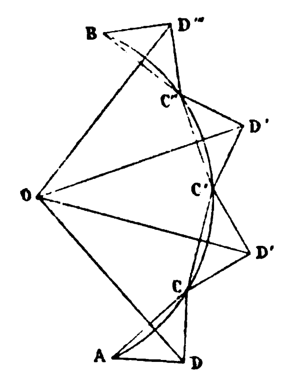
2° De trouver les valeurs de x correspondant au maximum et au minimum de la fonction

$$(R + a - x)(R - a + x)(a + 2x);$$

3° De classer ces valeurs relativement aux racines de la fonction elle-même, et de déduire de cette classification la condition pour que le volume engendré soit susceptible d'un maximum ou d'un minimum.

II. Démontrer que, si l'on désigne par R la partie entière de la racine carrée d'un nombre entier, par r le reste et par n la partie entière du quotient $\frac{2R}{r}$, la racine exacte est comprise entre $R + \frac{1}{n}$ et $R + \frac{1}{n+1}$.

III. Sur une circonférence de rayon égal à l'unité, on donne un arc AB égal à φ (en parties du rayon). On partage cet arc en m parties égales et l'on mène les cordes qui



joignent les points de division voisins; sur chacune de ces cordes comme hypoténuse on construit un triangle rectangle isoscèle ADC. Démontrer que, si m croît indéfiniment, le produit des distances des sommets de ces triangles au centre, c'est-à-dire $\overline{OD}^m$ a pour limite $e^{\frac{\varphi}{2}}$ ou $e^{-\frac{\varphi}{2}}$ suivant que les triangles sont rabattus à l'extérieur ou à l'intérieur de l'arc.

Géométrie descriptive.

Étant données les deux droites OA et OB', la première OA située dans le plan horizontal et faisant avec la ligne de terre xy un angle de 40°, la seconde OB' située dans

le plan vertical et faisant avec la ligne de terre xy un angle de $50°$; on demande :

1° De tracer les projections OC, OC′ d'une droite passant par le point O faisant avec OA un angle de $70°$, avec OB′ un angle de $45°$ et située par rapport au plan AOB′ du même côté que Ox;

2° De tracer les projections de l'axe du cône de révolution passant par les droites OA, OB′ et la droite OC, OC′ précédemment déterminée.

Calcul trigonométrique.

Calculer des valeurs de x comprises entre $0°$ et $360°$ qui satisfont à l'équation

$$\operatorname{tang}^3(3x+12°) = \frac{23,3382\sqrt[3]{\sin 177°\,12'\,18''}}{(0,017045)^2 \operatorname{tang}^4 94°\,30'\,48'' \sin^7 244°\,18'\,12''}.$$

Géométrie.

Énoncer et démontrer succinctement les principaux théorèmes qui permettent d'établir que le rapport des volumes de deux pyramides est égal au produit du rapport des surfaces des bases par le rapport des hauteurs.

Application. — Trouver l'expression numérique du volume d'une pyramide dont la base est donnée en mètres carrés, soit : $8^{mq},254$, et la hauteur en mètres, soit : $4^{m},32$, lorsqu'on prend pour unité de volume le tétraèdre régulier dont la hauteur est égale à 1^{m}.

Géométrie analytique.

Étant donnée l'équation

$$\lambda(x^2 - ax) - ay(x - y - a) = 0,$$

dans laquelle a désigne une quantité constante positive et λ un paramètre variable, on demande :

1° De déterminer la nature des diverses courbes que peut représenter cette équation quand λ varie de $+\infty$ à $-\infty$;

2° De démontrer qu'elles passent par trois points fixes et que le lieu de leurs centres est une ligne droite;

3° De construire pour une valeur donnée de λ le centre de la courbe correspondante et les tangentes aux trois points fixes;

4° De trouver le lieu géométrique des points de ces courbes où les tangentes sont parallèles à l'axe des x.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1887).

Mathématiques.

I. Inscrire dans un triangle ABC un rectangle DEFG dont un côté FG est placé sur BC, et tel que, en augmentant la surface de ce rectangle de celle du triangle équilatéral construit sur FG, on ait une somme équivalente à un carré donné K^2. Discuter.

II. On considère un triangle ABC, les trois hauteurs AA', BB', CC' qui rencontrent le cercle circonscrit aux points A'', B'', C'', et l'on demande : 1° d'exprimer les longueurs AA', BB', CC', AA'', BB'', CC'' en fonction des angles A, B, C du triangle ABC, et du rayon R du cercle circonscrit; 2° de montrer que la somme $\frac{AA''}{AA'}+\frac{BB''}{BB'}+\frac{CC''}{CC'}$ est une constante.

III. Trouver les valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$\sin x = \sin a + \sin(a + h) + \sin(a + 2h).$$

On fera

$$a = 8^\circ 25' 37'', \qquad h = 7^\circ 17' 26''.$$

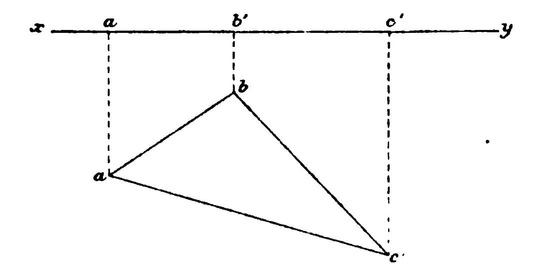
Épure (sujet retiré).

Un tétraèdre est placé sur le plan horizontal : un des côtés de la base *ab* (*a* est à gauche) est parallèle à la ligne de terre, et distant de cette ligne de $0^m,035$: sa longueur est de $0^m,100$; les deux autres côtés ont pour longueurs $ac = 0^m,123$, $bc = 0^m,110$. L'arète $Sa = 130^{mm}$, l'arète $Sc = 0^m,125$, l'angle dièdre formé par les deux faces *abc* et S*ac* est de 70°. Construire ce tétraèdre. A partir du sommet S, on prend sur S*a* une longueur SO égale à 50^{mm} et du point O comme centre on décrit une sphère passant par le sommet S : trouver l'intersection de cette sphère avec le tétraèdre.

Dans la mise à l'encre, on supposera enlevée la portion du tétraèdre détachée par la sphère.

Épure (second sujet).

Un tétraèdre SABC a sa base ABC sur le plan horizon-



tal : $aa' = 84^{mm}$, $a'b' = 99^{mm}$, $ab = 112^{mm}$, $bc = 144^{mm}$. $ac = 171^{mm}$. L'arète SA parallèle au plan vertical égale

136^{mm} et fait avec l'arête AB un angle de 62°. On demande : 1° de construire le tétraèdre; 2° de mener la droite DE perpendiculaire commune aux deux arêtes opposées SA et BC.

Du point O, milieu de DE, comme centre, on décrit une sphère avec un rayon égal à 22^{mm}; mener à cette sphère deux plans tangents perpendiculaires à l'arête SC, et construire les sections de ces deux plans avec le tétraèdre.

Dans la mise à l'encre, on ne conservera que la partie du tétraèdre comprise entre les deux plans.

Lavis.

Laver, soit à teintes plates superposées, soit à teintes fondues, la projection verticale d'un cône de révolution et celle d'un prisme droit à base carrée servant de socle.

Les rayons lumineux sont parallèles à une droite dont les projections font des angles de 45° avec la partie gauche de la ligne de terre.

THÉORIES DE LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE ET DE L'ABERRATION [1];

PAR M. OSSIAN BONNET.

La direction suivant laquelle la lumière qui émane d'une étoile arrive à l'observateur diffère de la ligne droite qui joindrait l'œil de l'observateur à cet astre. Cette différence tient à deux causes distinctes : d'une

---

[1] Leçons faites en 1887 à la Sorbonne pour les candidats à la Licence.

part, c'est l'atmosphère terrestre qui, infléchissant les rayons lumineux, nous fait voir les astres au-dessus de leurs positions réelles; d'autre part, la vitesse de translation de notre globe ayant un rapport fini avec la vitesse de la lumière, nous apercevons les étoiles en avant de leurs véritables positions dans le sens du mouvement de la Terre. Les théories de la réfraction astronomique et de l'aberration ont pour objet le calcul de ces deux effets, de telle sorte qu'on puisse corriger les observations, c'est-à-dire déduire les directions vraies des directions apparentes.

Nous commencerons par le phénomène de la réfraction, qui est le plus important.

Réfraction astronomique.

§ I. — Notions préliminaires.

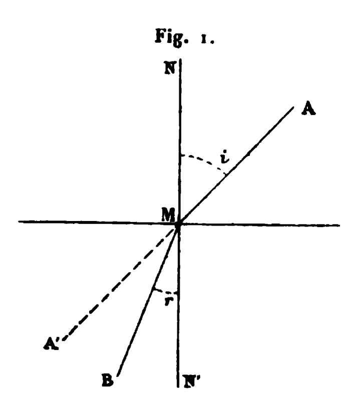
La lumière se meut en ligne droite dans le vide ou dans un milieu homogène. Mais, si un rayon lumineux passe d'un milieu homogène dans un autre milieu homogène, de densité différente, il se réfracte, c'est-à-dire est dévié de sa direction primitive, conformément aux trois lois expérimentales dont nous rappellerons d'abord les énoncés :

Première loi. — *Le rayon incident* AM (*fig.* 1), *le rayon réfracté* MB *et la normale* NMN′ *à la surface (plane ou courbe) de séparation des deux milieux sont dans un même plan.*

Deuxième loi. — *Pour les deux mêmes milieux, le*

rapport du sinus de l'angle i d'incidence au sinus de l'angle r de réfraction est constant quelle que soit la direction du rayon incident.

Fig. 1.



Ce rapport $\frac{\sin i}{\sin r}$ est appelé *indice de réfraction du second milieu par rapport au premier.*

Si le rayon lumineux passe du vide dans un milieu quelconque, le rapport $\frac{\sin i}{\sin r}$ se nomme *indice absolu de réfraction de ce milieu.*

Troisième loi. — *Soient trois milieux homogènes successifs* (*fig.* 2) *que nous appellerons* (A), (B), (C); *si n est*

Fig. 2.

(A)

(B)

(C)

l'indice de réfraction du milieu (B) *par rapport au milieu* (A), *n' l'indice du milieu* C *par rapport au mi-*

lieu (B), *le produit* nn' *sera égal à l'indice de réfraction du milieu* (C) *par rapport au milieu* (A).

De ces trois lois résultent plusieurs conséquences :

1° (A) et (B) étant deux milieux homogènes quelconques, si n est l'indice de réfraction du milieu (B) par rapport au milieu (A), l'inverse $\frac{1}{n}$ sera l'indice de réfraction du milieu (A) par rapport au milieu (B); il suffit, pour le démontrer, d'appliquer la troisième loi au cas où le troisième milieu (C) est identique au premier milieu (A).

2° n' et n'' étant les indices absolus de réfraction de deux milieux homogènes (A') et (A'') et n l'indice de réfraction du milieu (A'') par rapport au milieu (A'), on a

$$n = \frac{n''}{n'}.$$

Il suffit encore d'appliquer la troisième loi en supposant que le milieu (C) devienne le vide, puis de tenir compte de la propriété précédente.

3° Soient (*fig.* 3)

$$A_1A_2, \quad A_2A_3, \quad A_3A_4, \quad \ldots, \quad A_{p-1}A_p, \quad A_pA_{p+1}$$

les chemins rectilignes successivement parcourus par un rayon lumineux qui traverse une suite de milieux homogènes séparés chacun du suivant par une surface quelconque et ayant pour indices absolus de réfraction respectifs

$$n_1, \quad n_2, \quad n_3, \quad \ldots, \quad n_{p-1}, \quad n_p.$$

La somme

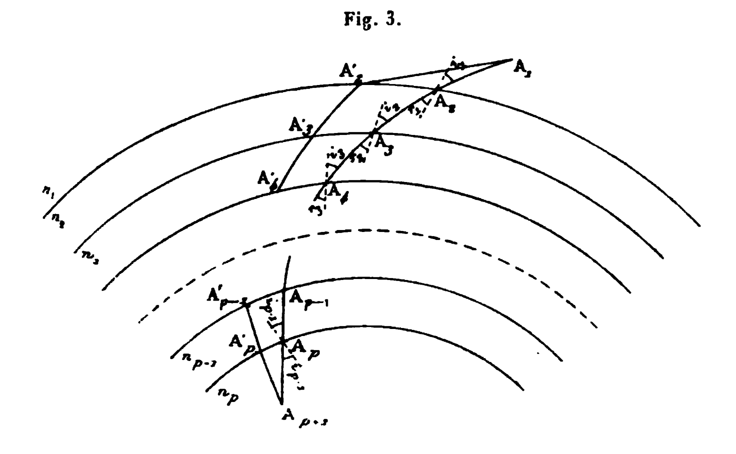
$$A_1A_2 . n_1 + A_2A_3 . n_2 + \ldots + A_{p-1}A_p . n_{p-1} + A_pA_{p+1} . n_p$$

ou

$$\sum_{k=1}^{k=p} A_kA_{k+1} . n_k$$

des produits obtenus en multipliant chaque chemin rectiligne élémentaire par l'indice du milieu auquel il se

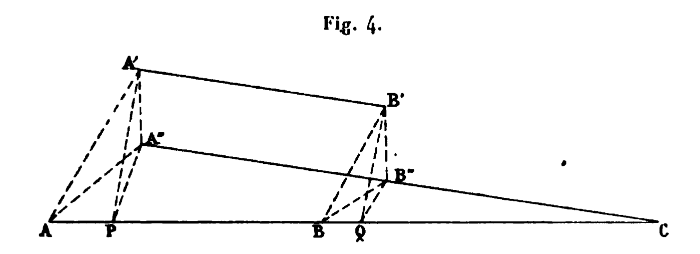
Fig. 3.



rapporte sera un minimum parmi les sommes analogues relatives à tous les ensembles de chemins rectilignes élémentaires que l'on peut inscrire à la suite l'un de l'autre dans les milieux successifs, de manière à former un polygone continu allant du point A_1 au point A_{p+1}.

Remarquons d'abord que, lorsque deux points A et B sont transportés en A' et B' à la suite de déplacements

Fig. 4.



rectilignes ou curvilignes infiniment petits, on a, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur

aux déplacements,

$$A'B' - AB + AA' \cos A'AB + BB' \cos B'BA = 0 \text{ (1)}.$$

Ce théorème étant rappelé, considérons la propriété énoncée. Elle sera évidemment démontrée si nous faisons voir que, lorsque l'on déplace infiniment peu les points $A_2, A_3, \ldots, A_p$ chacun sur la surface de séparation à laquelle il appartient, de manière à les amener

---

(1) Voici une démonstration élémentaire de cette proposition bien connue :

On peut se borner à considérer le cas où AA' et BB' sont rectilignes; car, lorsque AA' par exemple est curviligne, le remplacement de AA' par sa corde et de l'angle que nous avons appelé A'AB, et qui est celui de la tangente en A à AA' avec AB par l'angle de la corde AA' avec AB, n'introduit que des termes de second ordre que nous négligeons par hypothèse.

Cela posé, projetons A'B' : 1° en A″B″ sur le plan mené par AB parallèlement à A'B'; 2° en PQ sur AB; menons d'ailleurs A″P et B″Q qui seront évidemment perpendiculaires à AB, nous aurons

$$AP = AA' \cos A'AB = AA'' \cos A''AB,$$
$$BQ = -BB' \cos B'BA = -BB'' \cos B''BA$$

et

$$A'B' = A''B'';$$

mais, en prolongeant A″B″ et AB jusqu'à leur rencontre en C, les deux triangles A″AC, B″BC donnent successivement

$$AC = A''A \cos A''AC + A''C \cos C, \quad BC = B''B \cos B''BC + B''C \cos C;$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$AB = A''A \cos A''AC - B''B \cos B''BC + A''B'' \cos C,$$

et comme, d'après la relation

$$\sin C = AA'' \frac{\sin A''AC}{A''C},$$

C est infiniment petit du même ordre au moins que AA' et que BB', on peut écrire

$$A''B'' - AB + AA'' \cos A''AC + BB'' \cos B''BA = 0,$$

ou

$$A'B' - AB + AA' \cos A'AC + BB' \cos B'BA = 0,$$

en négligeant toujours les termes d'ordre supérieur au premier.

respectivement en A'_2, A'_3, ..., A'_p, la somme

$$A_1A_2.n_1 + A_2A_3.n_2 + A_3A_4.n_3 + \ldots + A_{p-1}A_p.n_{p-1} + A_pA_{p+1}.n_p,$$

qui devient

$$A_1A'_2.n_1 + A'_2A'_3.n_2 + A'_3A'_4.n_3 + \ldots + A'_{p-1}A'_p.n_{p-1} + A'_pA_{p+1}.n_p,$$

conserve la même valeur aux infiniment petits près d'un ordre supérieur aux déplacements.

Or désignons par Δ la différence entre ces deux sommes, c'est-à-dire l'expression

$$\begin{aligned}\Delta = &(A_1A'_2 - A_1A_2)\,n_1 + (A'_2A'_3 - A_2A_3)\,n_2 \\ &+ (A'_3A'_4 - A_3A_4)\,n_3 + \ldots \\ &+ (A'_{p-1}A'_p - A_{p-1}A_p)\,n_{p-1} + (A'_pA_{p+1} - A_pA_{p+1})\,n_p.\end{aligned}$$

Appelons i_1 et r_1 les angles d'incidence et de réfraction lors du passage de la lumière du premier dans le second milieu, i_2 et r_2 les angles d'incidence et de réfraction lors du passage de la lumière du second dans le troisième milieu, enfin i_{p-1} et r_{p-1} les angles d'incidence et de réfraction lors du passage de la lumière du $(p-1)^{\text{ième}}$ milieu dans le $p^{\text{ième}}$. Nous aurons d'après le lemme établi ci-dessus et en négligeant toujours les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$\begin{aligned}&A_1A'_2 - A_1A_2 = A_2A'_2 \sin i_1,\\ &A'_2A'_3 - A_2A_3 = -A_2A'_2 \sin r_1 + A_3A'_3 \sin i_2,\\ &A'_3A'_4 - A_3A_4 = -A_3A'_3 \sin r_2 + A_4A'_4 \sin i_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &A'_{p-1}A'_p - A_{p-1}A_p = -A_{p-1}A'_{p-1} \sin r_{p-2} + A_pA'_p \sin i_{p-1},\\ &A'_pA_{p+1} - A_pA_{p+1} = -A_pA'_p \sin r_{p-1}.\end{aligned}$$

Ajoutons ces égalités membre à membre après avoir multiplié la première par n_1, la seconde par n_2, la troisième par n_3, ..., la dernière par n_p; nous aurons

d'abord, comme premier membre de l'équation résultante, la différence Δ; quant au second membre, si l'on a soin, en l'évaluant, de grouper le terme positif du second membre de chaque équation partielle avec le terme négatif du second membre de l'équation partielle suivante, ce qui entraîne l'emploi de tous les termes, car la première équation n'a pas de terme négatif et la dernière n'a pas de terme positif, il prendra la forme

$$\begin{aligned} & A_2 A'_2 (n_1 \sin i_1 - n_2 \sin r_1) \\ & + A_3 A'_3 (n_2 \sin i_2 - n_3 \sin r_2) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_{p-1} A'_{p-1} (n_{p-2} \sin i_{p-2} - n_{p-1} \sin r_{p-2}) \\ & + A_p A'_p (n_{p-1} \sin i_{p-1} - n_p \sin r_{p-1}); \end{aligned}$$

mais $\frac{\sin i_k}{\sin r_k}$ est, quel que soit k, l'indice de réfraction du $(k+1)^{\text{ième}}$ milieu par rapport au $(k)^{\text{ième}}$, c'est-à-dire $\frac{n_{k+1}}{n_k}$; donc

$$n_k \sin i_k - n_{k+1} \sin r_k = 0;$$

de là résulte que le second membre de l'équation résultante est nul, et par suite qu'il en est de même de Δ.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que de la marche de la lumière à travers une suite de milieux homogènes successifs ayant chacun des dimensions finies et une densité particulière n'obéissant d'ailleurs à aucune loi. Le problème ainsi posé ne convient pas aux cas de la nature; en réalité, on n'a à considérer qu'un seul milieu, non homogène et dont la densité, bien déterminée en chaque point, varie d'un point à l'autre et est une fonction en général continue des trois coordonnées x, y, z qui fixent la position du point du milieu auquel elle se rapporte. Les points pour lesquels la densité est la même appartiennent à une surface et ne constituent pas un volume ou un milieu.

L'indice absolu de réfraction est également bien défini pour chaque point M de l'espace, mais varie d'une manière continue avec la position de ce point. Il n'est autre que celui qui se rapporte au passage de la lumière du vide dans un milieu de dimensions finies, ayant partout la même densité que le milieu considéré au point M. Enfin il existe des surfaces d'égal indice absolu de réfraction, lesquelles coïncident avec celles d'égale densité et jouent le même rôle que les surfaces de séparation de deux milieux consécutifs.

Quant à la marche de la lumière, il est évident qu'elle s'effectue non plus sur un polygone, mais sur une courbe, et que celle-ci, d'après le théorème que nous avons démontré en dernier lieu, jouit de la propriété d'être, parmi toutes les courbes qui joignent le point de départ A de la lumière au point d'arrivée B, celle qui rend minimum l'intégrale $\int n\,ds$, où s est l'arc de la courbe compté à partir de A, n l'indice absolu de réfraction du milieu pour l'extrémité de s et qui s'étend depuis A jusqu'à B. C'est cette propriété que nous prendrons comme définition de la trajectoire lumineuse, et l'on va voir qu'elle conduit aisément aux équations différentielles de cette courbe.

§ II. — Équations différentielles de la trajectoire lumineuse.

Soient AMB la trajectoire lumineuse allant de A en B et AM′B une courbe quelconque infiniment voisine ayant les mêmes extrémités. Considérons les valeurs de l'intégrale $\int n\,ds$ définie précédemment : 1° pour AMB, 2° pour AM′B, et appelons $\int n\,ds$ et $\int n'\,ds'$ ces valeurs.

D'après la définition même, $\int n\,ds$ étant plus petit que

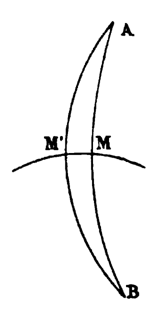
toutes les valeurs de $\int n'ds'$, la différence

$$\int n'ds' - \int nds$$

devra être nulle en négligeant les infiniment petits du deuxième ordre. Évaluons donc cette différence.

Il s'agit, comme on voit, de la différence de deux sommes; or le moyen le plus simple, en pareil cas, consiste à faire correspondre à chaque élément de la première somme un élément convenablement choisi de la seconde, à prendre la différence des éléments correspondants et à faire la somme des résultats obtenus. As-

Fig. 5.



socions à l'élément de la première somme qui se rapporte à un point quelconque M de AB (*fig.* 5) l'élément de la seconde somme qui se rapporte au point M' de AM'B pour lequel l'indice absolu de réfraction est le même qu'en M; nous aurons alors, pour la différence cherchée,

$$\int n(ds' - ds)$$

ou, à un infiniment petit près du second ordre,

$$\int n\delta ds,$$

en représentant par la caractéristique δ les différentielles totales relatives à des variations qui laissent n constant

et qui, par suite, correspondent à des déplacements effectués d'une manière quelconque sur une surface d'égal indice absolu de réfraction. La condition qui définit la trajectoire lumineuse est donc

$$\int n\,\delta ds = 0. \tag{1}$$

Mais x, y, z étant les coordonnées rectangulaires d'un point du milieu et la caractéristique d représentant toujours les différentielles relatives à un déplacement effectué sur la courbe AMB, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

d'où

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\,\delta dx + \frac{dy}{ds}\,\delta dy + \frac{dz}{ds}\,\delta dz;$$

l'équation (1) prend donc la forme

$$\int\left(n\frac{dx}{ds}\,\delta dx + n\frac{dy}{ds}\,\delta dy + n\frac{dz}{ds}\,\delta dz\right) = 0, \tag{2}$$

que l'on peut, en intervertissant l'ordre des différentiations correspondant à d et à δ dans chaque terme, écrire ainsi

$$\int n\frac{dx}{ds}\,d\delta x + \int n\frac{dy}{ds}\,d\delta y + \int n\frac{dz}{ds}\,d\delta z = 0. \tag{2 bis}$$

Intégrons par parties ; le premier terme donne

$$\int n\frac{dx}{ds}\,d\delta x = \left(n\frac{dx}{ds}\,\delta x\right)_0^1 - \int \delta x\,d.n\frac{dx}{ds},$$

$\left(n\frac{dx}{ds}\,\delta x\right)_0^1$ étant la différence des valeurs de $n\frac{dx}{ds}\,\delta x$, pour les limites des intégrales, c'est-à-dire pour les extrémités de la trajectoire lumineuse ; mais on a $\delta x = 0$ à ces deux extrémités, puisque, lorsqu'on passe de AMB à AM′B, les extrémités sont conservées ; donc

$$\int n\frac{dx}{ds}\,d\delta x = -\int \delta x\,d.n\frac{dx}{ds}.$$

On verrait de même que

$$\int n \frac{dy}{ds} d\,\delta y = -\int \delta y\, d.n \frac{dy}{ds},$$

$$\int n \frac{dz}{ds} d\,\delta z = -\int \delta z\, d.n \frac{dz}{ds};$$

donc l'égalité (2 *bis*) devient

$$(3) \qquad \int \left(\delta x\, d.n \frac{dx}{ds} + \delta y\, d.n \frac{dy}{ds} + \delta z\, d.n \frac{dz}{ds} \right) = 0.$$

Les différentielles totales δx, δy, δz ne sont pas entièrement indépendantes, mais elles ne sont liées que par une seule relation, celle qui exprime que ces différentielles laissent n constant et qui est

$$\frac{\partial n}{\partial x} \delta x + \frac{\partial n}{\partial y} \delta y + \frac{\partial n}{\partial z} \delta z = 0;$$

en tirant de cette relation la valeur de δz en fonction de δx et de δy et la portant dans l'équation (3), on obtient

$$\int \left[\delta x \left(d.n \frac{dx}{ds} - \frac{\frac{\partial n}{\partial x}}{\frac{\partial n}{\partial z}} d.n \frac{dz}{ds} \right) + \delta y \left(d.n \frac{dy}{ds} - \frac{\frac{\partial n}{\partial y}}{\frac{\partial n}{\partial z}} d.n \frac{dz}{ds} \right) \right],$$

où dès lors δx et δy sont tout à fait quelconques en grandeur et en signe; on voit par là que l'on doit avoir, en tous les points de la courbe,

$$(4) \quad d.n \frac{dn}{ds} - \frac{\frac{\partial n}{\partial x}}{\frac{\partial n}{\partial z}} d.n \frac{dz}{ds} = 0, \qquad d.n \frac{dy}{ds} - \frac{\frac{\partial n}{\partial y}}{\frac{\partial n}{\partial z}} d.n \frac{dz}{ds} = 0;$$

car, s'il en était autrement, on pourrait disposer de δx et de δy de façon que les éléments de l'intégrale fussent tous de même signe, et l'intégrale ne serait pas nulle.

Les conditions (4), que l'on écrit ordinairement sous

la forme d'une suite de rapports égaux,

$$(4\ bis)\qquad \frac{d.n\frac{dx}{ds}}{\frac{\partial n}{\partial x}} = \frac{d.n\frac{dy}{ds}}{\frac{\partial n}{\partial y}} = \frac{d.n\frac{dz}{ds}}{\frac{\partial n}{\partial z}},$$

sont les équations différentielles de la trajectoire lumineuse. Ces équations ne peuvent être intégrées que dans des cas très particuliers; mais elles fournissent plusieurs résultats utiles que nous allons faire connaître.

§ III. — Propriétés générales des trajectoires lumineuses.

Ajoutons terme à terme les rapports (*4 bis*, § II), après avoir effectué les différentiations indiquées et avoir multiplié les deux termes du premier rapport par $\frac{dx}{ds}$, les deux termes du second rapport par $\frac{dy}{ds}$, les deux termes du troisième rapport par $\frac{dz}{ds}$; il viendra, pour la valeur commune des trois rapports,

$$\frac{dn\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] + n\left(\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds}\right)}{\frac{\partial n}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial n}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial n}{\partial z}\frac{dz}{ds}},$$

ou simplement ds, à cause des relations

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\frac{\partial n}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial n}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial n}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{dn}{ds}.$$

Cela posé, on aura les trois équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\left(n\,\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}=\dfrac{\partial n}{\partial x},\\[2ex] \dfrac{d\left(n\,\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds}=\dfrac{\partial n}{\partial y},\\[2ex] \dfrac{d\left(n\,\dfrac{dz}{ds}\right)}{ds}=\dfrac{\partial n}{\partial z},\end{array}\right.$$

dont l'emploi simultané offre de grands avantages, mais qu'il ne faudrait cependant pas regarder comme distinctes, car, en réalité, elles se réduisent à deux.

Si l'on effectue enfin les différentiations indiquées dans les équations (5), on trouve les relations suivantes

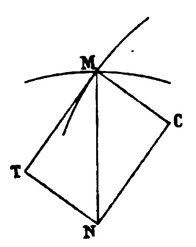
$$(1\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dn}{ds}\dfrac{dx}{ds}+n\,\dfrac{d\,\dfrac{dx}{ds}}{ds}=\dfrac{\partial n}{\partial x},\\[2ex] \dfrac{dn}{ds}\dfrac{dy}{ds}+n\,\dfrac{d\,\dfrac{dy}{ds}}{ds}=\dfrac{\partial n}{\partial y},\\[2ex] \dfrac{dn}{ds}\dfrac{dz}{ds}+n\,\dfrac{d\,\dfrac{dz}{ds}}{ds}=\dfrac{\partial n}{\partial z},\end{array}\right.$$

qui se résument en une propriété géométrique élégante, donnant sur-le-champ tout ce que l'on connaît de général sur les trajectoires lumineuses.

On sait que $\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{dy}{ds}$, $\dfrac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles que la tangente positive à la courbe AMB fait avec les axes des coordonnées et qu'en appelant ρ le rayon de courbure, $\rho\,\dfrac{d\,\dfrac{dx}{ds}}{ds}$, $\rho\,\dfrac{d\,\dfrac{dy}{ds}}{ds}$, $\rho\,\dfrac{d\,\dfrac{dz}{ds}}{ds}$ sont les cosinus des angles que la normale principale prolongée de la courbe vers le

centre de courbure fait avec les mêmes axes ; donc les premiers termes $\frac{dn}{ds}\frac{dx}{ds}$, $\frac{dn}{ds}\frac{dy}{ds}$, $\frac{dn}{ds}\frac{dz}{ds}$ des premiers membres des trois équations (3 *bis*) sont les projections

Fig. 6.



respectives sur l'axe des x, sur l'axe des y et sur l'axe des z, d'une droite MT égale à $\frac{dn}{ds}$ et dirigée suivant la tangente positive à la trajectoire lumineuse, et les seconds termes $n\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}$, $n\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}$, $n\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$ des premiers membres des mêmes équations sont les projections respectives sur l'axe des x, sur l'axe des y et sur l'axe des z, d'une droite MC égale à $\frac{n}{\rho}$ et dirigée suivant la normale allant de la courbe au centre de courbure ; d'ailleurs les seconds membres $\frac{\partial n}{\partial x}$, $\frac{\partial n}{\partial y}$, $\frac{\partial n}{\partial z}$ des équations (1 *bis*) sont les projections respectives sur l'axe des x, sur l'axe des y et sur l'axe des z d'une droite MN égale à

$$\sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)^2}=\Delta$$

et ayant pour cosinus directeurs

$$\frac{\frac{\partial n}{\partial x}}{\Delta},\quad \frac{\frac{\partial n}{\partial y}}{\Delta},\quad \frac{\frac{\partial n}{\partial z}}{\Delta},$$

c'est-à-dire qui est dirigée suivant la normale à la surface d'égal indice absolu de réfraction $n = \text{const}$. Cela étant, on conclut du théorème fondamental des projections que la droite MN est la résultante géométrique des deux droites MT et MC, et par conséquent que le point M de la trajectoire lumineuse et les trois points T, N et C précédemment définis sont les sommets d'un parallélogramme qui, à cause de la perpendicularité de MC et de MT, est ici un rectangle. Ce théorème de Géométrie équivaut aux trois équations (5 *bis*); il montre immédiatement que le plan d'incidence TMN coïncide avec le plan osculateur TMC de la trajectoire lumineuse et que l'angle d'incidence $\text{TMN} = i$ a pour tangente $\frac{\text{TN}}{\text{TM}} = \frac{\text{MC}}{\text{TM}} = \frac{n}{\rho \frac{dn}{ds}}$.

Ce dernier résultat

$$\operatorname{tang} i = \frac{n}{\rho \frac{dn}{ds}}$$

nous sera plus tard d'une grande utilité; on en déduit d'abord

$$\frac{ds}{\rho} = \operatorname{tang} i \, \frac{dn}{n}$$

et, en intégrant depuis l'origine A jusqu'à l'extrémité B de la trajectoire lumineuse,

$$\int \frac{ds}{\rho} = \int \operatorname{tang} i \, \frac{dn}{n}. \tag{2}$$

Or deux cas sont à distinguer : la trajectoire peut être plane ou gauche.

Dans le premier cas, l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho}$ est évidemment l'angle que forment les tangentes à la courbe lumineuse en ses extrémités A et B, et par suite ce qu'on appelle la

réfraction totale qu'éprouve la lumière pendant tout son trajet. Ainsi l'évaluation de cette réfraction, qui est, en définitive, l'objet véritable du problème à résoudre, se ramène à celle de l'intégrale $\int \tang i \frac{dn}{n}$.

Si la trajectoire lumineuse n'est pas plane, l'intégrale $\int \tang i \frac{dn}{n}$, quoique moins utile, a encore une signification remarquable.

Supposons que les rayons lumineux considérés soient ceux qui émanent d'une étoile et que le milieu traversé par ces rayons soit l'atmosphère; menons par l'œil de l'observateur des rayons de la sphère céleste respectivement parallèles aux différentes tangentes à la courbe lumineuse, depuis celle qui répond au point A jusqu'à celle qui correspond au point B; les extrémités de ces rayons seront les positions apparentes de l'étoile pendant le temps que la lumière émanée de l'étoile met à traverser l'atmosphère; donc le lieu de ces extrémités sera l'arc de courbe que paraîtra décrire l'étoile dans le même temps et l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho}$ sera ce que nous avons appelé la *distance angulaire* correspondant à cet arc de courbe.

§ IV. — Mouvement de la lumière émanée d'une étoile, a travers l'atmosphère, dans le cas ou la densité de celle-ci ne dépend que de la distance au centre de la Terre.

Nous allons appliquer les résultats généraux qui précèdent à un cas particulièrement utile en Astronomie, celui où il s'agit d'un rayon lumineux qui, émanant d'une étoile, c'est-à-dire partant du vide, arrive en un point de la surface de la Terre, après avoir traversé la

masse gazeuse appelée atmosphère. Nous supposerons, comme on le fait communément, que la Terre est sphérique et que les surfaces d'égale densité ou d'égal indice absolu de réfraction de l'atmosphère sont des sphères concentriques à la Terre; nous conserverons d'ailleurs les mêmes notations que dans ce qui précède. Cela posé, si nous prenons le centre de la Terre pour origine des coordonnées, n sera une fonction de

$$x^2+y^2+z^2;$$

les dérivées partielles $\frac{\partial n}{\partial x}$, $\frac{\partial n}{\partial y}$, $\frac{\partial n}{\partial z}$ seront donc respectivement proportionnelles à x, y, z et les deux équations (4 *bis*) de la trajectoire lumineuse deviendront

$$\frac{d\left(n\,\frac{dx}{ds}\right)}{x}=\frac{d\left(n\,\frac{dy}{ds}\right)}{y}=\frac{d\left(n\,\frac{dz}{ds}\right)}{z},$$

que nous remplacerons par les trois suivantes :

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned} &z\,d.n\,\frac{dy}{ds}-y\,d.n\,\frac{dz}{ds}=0,\\ &x\,d.n\,\frac{dz}{ds}-z\,d.n\,\frac{dx}{ds}=0,\\ &y\,d.n\,\frac{dx}{ds}-x\,d.n\,\frac{dy}{ds}=0.\end{aligned}\right.$$

Les premiers membres sont ici des différentielles exactes. En effet,

$$\begin{aligned} &z\,d.n\,\frac{dy}{ds}-y\,d.n\,\frac{dz}{ds}\\ &\quad=d.nz\,\frac{dy}{ds}-n\,\frac{dy\,dz}{ds}-d.ny\,\frac{dz}{ds}+n\,\frac{dz\,dy}{ds}\\ &\quad=d\left[n\left(z\,\frac{dy}{ds}-y\,\frac{dz}{ds}\right)\right],\end{aligned}$$

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur de Mécanique physique à la Faculté des Sciences de Paris, ancien professeur de Calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de Lille et à l'Institut industriel du Nord. — **Cours d'Analyse infinitésimale**, à l'usage des personnes qui étudient cette Science en vue de ses applications mécaniques et physiques. 2 volumes in-8, avec figures dans le texte.

On vend séparément :

TOME I. — *Calcul différentiel.*

Fascicule I. — Partie élémentaire; 1887. .... 7 fr. 50 c.
Fascicule II. — Partie complémentaire; 1887 .... 9 fr. 50 c.

TOME II. — *Calcul intégral.*

Fascicule I. — Partie élémentaire .... (*Sous presse.*)
Fascicule II. — Partie complémentaire .... (*Sous presse.*)

En offrant cet Ouvrage à l'Académie des Sciences, dans la séance du 27 juin 1887, M. Boussinesq s'est exprimé ainsi :

Ce Cours d'Analyse s'adresse surtout aux physiciens, naturalistes, élèves ingénieurs, philosophes, etc., peu habitués au maniement des formules algébriques, mais qui éprouvent le besoin, pour leurs études propres, de connaître, dans son esprit et dans ses principaux résultats, le calcul des infiniment petits ou des fonctions continues.

J'espère, en les conduisant pas à pas par les voies qui m'ont paru les plus intuitives, les mieux appropriées à notre sentiment naturel de la graduelle variation des choses, les y familiariser avec les idées et les méthodes qui ont valu à ce puissant instrument intellectuel, toujours en voie d'accroissement depuis le XVII[e] siècle, sa merveilleuse coopération aux progrès des Sciences de la nature et une place presque aussi grande dans l'enseignement des Écoles techniques que dans celui de nos Facultés.

BRISSE (Ch.), Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet, Répétiteur de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique. — **Cours de Géométrie descriptive.**

I[e] PARTIE, à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques élémentaires. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1882......... 5 fr.

II[e] PARTIE, à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques spéciales. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1887.............. 7 fr.

DARBOUX (Gaston). — **Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences. — Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** Deux volumes grand in-8, avec figures, se vendant séparément :

I[re] PARTIE : *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima*; 1887. 15 fr.

II[e] PARTIE : *Théorie des systèmes de rayons rectilignes. — Formules de Codazzi. Lignes géodésiques. Théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* .... (*Sous presse.*)

ROUCHÉ (Eugène), Professeur à l'École Centrale, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, etc., et **COMBEROUSSE** (Charles de), Professeur à l'École Centrale et au Conservatoire des Arts et Métiers, etc. — **Traité de Géométrie**, conforme aux Programmes officiels, renfermant un très grand nombre d'Exercices et plusieurs Appendices consacrés à l'exposition des PRINCIPALES MÉTHODES DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE. 5[e] édition, revue et notablement augmentée. In-8 de XLIX-966 pages, avec 616 figures dans le texte, et 1095 questions proposées; 1883..................... 16 fr.

Prix de chaque Partie :

I[re] PARTIE. — *Géométrie plane* .... 7 fr.
II[e] PARTIE. — *Géométrie de l'espace; Courbes et surfaces*

TABLE DES MATIÈRES.

Juillet 1887.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

(Troisième Série.) — Août 1887.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,
EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE.

AOUT 1887.

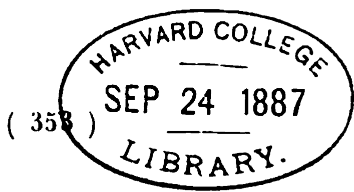
S'adresser, pour la rédaction,
à M. BRISSE, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine),
ou à M. ROUCHÉ, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Par application de la loi du 7 avril 1879, tous les bureaux de poste de France, d'Algérie, de Belgique, de Danemark, d'Italie, de Norvège, s Pays-Bas, de Suède et de Suisse sont autorisés à recevoir les abonnements. L'éditeur des *Nouvelles Annales de Mathématiques* prend à sa arge la remise perçue par l'Administration, et il suffit de verser à un bureau de poste, sans frais supplémentaires, le montant de l'abonnement aris : 15 fr. — *Départements et Union postale* : 17 fr. — *Autres pays* : 20 fr.).



et de même

$$x\,d.n\,\frac{dz}{ds} - z\,d.n\,\frac{dx}{ds} = d\left[n\left(x\,\frac{dz}{ds} - z\,\frac{dx}{ds}\right)\right],$$

$$y\,d.n\,\frac{dx}{ds} - x\,d.n\,\frac{dy}{ds} = d\left[n\left(y\,\frac{dx}{ds} - x\,\frac{dy}{ds}\right)\right];$$

on peut donc faire immédiatement une première intégration pour chaque équation et, en appelant C, C′, C″ des constantes arbitraires, on trouve les trois équations différentielles du premier ordre

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} n\left(z\,\frac{dy}{ds} - y\,\frac{dz}{ds}\right) &= \mathrm{C},\\ n\left(x\,\frac{dz}{ds} - z\,\frac{dx}{ds}\right) &= \mathrm{C}',\\ n\left(y\,\frac{dx}{ds} - x\,\frac{dy}{ds}\right) &= \mathrm{C}'', \end{aligned}\right.$$

lesquelles, bien entendu, ne sont pas distinctes et se réduisent à deux.

Ces dernières équations conduisent encore à une autre qui est en termes finis; on n'a qu'à multiplier la première par x, la deuxième par y, la troisième par z et à ajouter membre à membre, ce qui donne

$$0 = \mathrm{C}x + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''z.$$

On voit alors que l'on peut, en définitive, prendre pour les deux équations qui définissent complètement la trajectoire lumineuse l'équation en termes finis

$$(a)\qquad \mathrm{C}x + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''z = 0,$$

et l'une des équations différentielles du premier ordre (2), l'équation

$$(b)\qquad n\left(y\,\frac{dx}{ds} - x\,\frac{dy}{ds}\right) = \mathrm{C}'',$$

par exemple.

L'équation (a) montre que le rayon lumineux se

meut dans un plan passant par l'origine; ce plan n'est autre que le plan appelé *vertical* qui contient le rayon lumineux à un moment donné, au moment où il pénètre dans l'atmosphère ou lorsqu'il parvient à l'œil de l'observateur.

L'équation (b) est également susceptible d'une interprétation géométrique : en effet, d'après une formule connue, $y\,dx - x\,dy$ est la projection sur le plan des xy du double de l'aire infiniment petite $d\sigma$ décrite par le rayon vecteur r de la trajectoire et par conséquent est égal au produit de $2d\sigma$ par le cosinus de l'angle ω du plan de la trajectoire avec le plan des xy; mais $d\sigma$ est la surface d'un triangle ayant ds pour base et pour hauteur la perpendiculaire abaissée du centre de la Terre sur la tangente à la trajectoire, c'est-à-dire $r\sin i$; donc

$$n(y\,dx - x\,dy) = nr\sin i\cos\omega,$$

donc l'équation (6) peut s'écrire

$$nr\sin i\cos\omega = C'',$$

ou simplement

$$nr\sin i = K,$$

K étant une nouvelle constante.

La constante K est facile à déterminer : si nous appelons a le rayon de la Terre, n_0 l'indice absolu de réfraction pour la couche d'air qui est en contact avec la surface de la Terre et $\frac{\pi}{2} - z_a$ l'angle aigu sous lequel le rayon lumineux vient frapper la Terre, de façon que z_a soit la distance zénithale apparente de l'astre après que la lumière émanée de l'astre a traversé toute l'atmosphère, il est évident que $n_0 a \sin z_a$ est la valeur particulière de $nr\sin i$ qui correspond à l'extrémité de la trajectoire; cette expression est donc égale à la con-

stante K et nous pouvons écrire

$$(c) \qquad nr \sin i = n_0 a \sin z_a.$$

Nous terminerons là ce qui se rapporte à la recherche de la trajectoire lumineuse. La détermination complète de cette trajectoire n'est pas, en effet, indispensable pour le but que nous voulons atteindre ; ce qu'il importe de connaître, c'est le changement de direction subi par le rayon lumineux depuis le moment où il pénètre dans l'atmosphère, jusqu'à celui où il parvient à la surface de la Terre, c'est-à-dire ce que nous appellerons la *réfraction totale* R. Or, la trajectoire lumineuse étant plane, comme on l'a vu plus haut, la réfraction totale R est l'angle que forment les tangentes aux extrémités de cette courbe et par conséquent a pour valeur, d'après un résultat obtenu à la fin du paragraphe III, l'intégrale définie $\int \tang i \frac{dn}{n}$, étendue de l'origine à l'extrémité de la courbe lumineuse. C'est de l'évaluation de cette intégrale que nous allons exclusivement nous occuper dans ce qui va suivre.

§ V. — Relations entre les divers éléments de l'atmosphère. — Transformations de l'intégrale définie $\int \tang i \frac{dn}{n}$.

L'évaluation exacte de l'intégrale définie $\int \tang i \frac{dn}{n}$ ne peut être entreprise qu'après avoir mis celle-ci sous la forme $\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx$, où x désigne la variable que l'on choisit pour fixer les différents points de la trajectoire lumineuse, $\varphi(x)$ une fonction bien déterminée de x, et x_0 et X les valeurs particulières de x qui se rappor-

tent aux extrémités de la courbe. Or, dans l'état actuel de nos connaissances sur la constitution de l'atmosphère, ce premier pas est absolument impossible à franchir, quelle que soit d'ailleurs la transformation que l'on fasse subir à l'intégrale. En effet, les différentes quantités qui se rapportent à un point M de l'atmosphère sont, indépendamment du rayon vecteur r et de l'indice absolu de réfraction n déjà considérés, la densité ρ, la pression p rapportée à l'unité de surface, la gravité g, c'est-à-dire l'attraction terrestre rapportée à l'unité de masse, ou bien encore, d'après ce que l'on démontre en Mécanique, l'accélération du mouvement des corps pesants dans le vide, la température T indiquée par le thermomètre centigrade et la hauteur barométrique H; elles ne sont pas reliées entre elles par un nombre de relations suffisant pour permettre d'exprimer les quantités dont on a besoin en fonction de celle d'entre elles qui est prise comme variable indépendante et qui fixe la position des différents points de la trajectoire lumineuse. La seule chose que l'on puisse faire, c'est de se servir des relations connues pour mettre $\tang i \frac{dn}{n}$ sous différentes formes et de voir si, parmi ces formes diverses, il n'en est pas une qui, au moyen d'hypothèses permises et de restrictions convenables, permette d'évaluer l'intégrale $\int \tang i \frac{dn}{n}$, sinon exactement, du moins avec une approximation suffisante pour les applications.

Avant de rappeler les lois auxquelles sont soumises les quantités r, n, ρ, p, g, T, H définies précédemment et auxquelles on donne le nom d'*éléments de l'atmosphère,* il ne sera pas inutile de bien préciser le sens que nous donnerons à ces éléments. Deux d'entre eux, n et T, sont des nombres abstraits d'après les définitions mêmes:

ils ne donnent donc lieu à aucune difficulté; les cinq autres seront aussi regardés comme des nombres abstraits, mais ces nombres n'auront rien d'absolu, ils résulteront de certaines conventions et de certaines propriétés géométriques ou mécaniques. On sait qu'en Mathématiques il existe trois entités essentielles et irréductibles : la longueur ou portion de droite, l'intervalle de temps, la masse d'un corps. On convient de remplacer une longueur, un intervalle de temps, une masse, pris chacun dans des circonstances bien déterminées et connues, par des nombres arbitrairement choisis, de manière à fixer ce qu'on appelle *les unités de longueur, de temps et de masse;* toutes les longueurs, tous les intervalles de temps, toutes les masses, sont alors remplacés par des nombres déterminés, car les rapports de deux longueurs, de deux intervalles de temps, de deux masses sont des nombres abstraits bien définis. Quant aux nombres représentant les autres éléments, nous les fixerons au moyen des égalités suivantes, que l'on emprunte à la Géométrie et à la Mécanique et qu'on démontre être vraies pour tous les cas, dès qu'elles ont lieu dans un cas particulier. Le nombre qui représente une surface de forme rectangulaire est égal au produit des nombres qui représentent la base et la hauteur et le nombre qui représente un volume de forme prismatique est égal au produit du nombre qui représente la surface de la base par le nombre qui représente la hauteur. Si l'on fait osciller un pendule simple dans le vide, le nombre τ qui représente la durée d'une oscillation, le nombre l qui représente la longueur du fil de suspension et le nombre g qui représente la gravité sont liés par la relation

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Le nombre qui représente la masse d'un corps est égal au nombre qui représente le volume multiplié par le nombre qui représente la densité ; enfin le nombre qui représente le poids d'un corps est égal au produit du nombre qui représente la masse par le nombre qui représente la gravité.

Revenons maintenant aux lois qui régissent les éléments de l'atmosphère, en supposant d'ailleurs ceux-ci préalablement évalués en nombre : ces lois sont au nombre de quatre et consistent en des relations entre les valeurs générales de r, n, ρ, p, g, H des éléments de l'atmosphère et les valeurs particulières r', n', ρ', p', g', H' qui se rapportent à un point déterminé M'.

1° Loi des puissances réfractives. — La fonction $n^2 - 1$ de l'indice absolu de réfraction n, appelée *puissance réfractive,* est proportionnelle à la densité ρ ; par conséquent on a

$$(a) \qquad \frac{n^2 - 1}{n'^2 - 1} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

2° Loi de Mariotte. — Si en un point quelconque M de l'atmosphère on considère un volume d'air V répondant à une masse déterminée, ce volume, préalablement ramené à la température de 0°, c'est-à-dire remplacé par ce qu'il devient lorsque la température passe de sa véritable valeur T à la valeur 0, est en raison inverse de la pression p. Or au volume V à la température T correspond le volume $\frac{V}{1 + mT}$ à la température de 0°, m étant le coefficient 0,003671 de dilatation de l'air ; donc le produit $\frac{Vp}{1 + mT}$ est constant. Mais, V répondant à une masse constante, Vρ est aussi constant ; donc $\frac{p}{\rho(1 + mT)}$ est constant, et

l'on a

$$(b) \qquad \frac{p}{p'} = \frac{\rho}{\rho'} \frac{1 + mT}{1 + mT'}.$$

3° Loi de la gravitation. — On sait qu'en appelant φ l'attraction exercée par une masse égale à 1 sur une autre masse égale à 1 placée à une distance égale à 1 de la première, l'attraction exercée par la Terre, dont nous désignerons la masse par μ, sur une masse égale à m placée en un point quelconque M de l'atmosphère, est $\frac{m\mu\varphi}{r^2}$; donc la gravité en M est $\frac{\mu\varphi}{r^2}$; par suite, gr^2 est constant et l'on a

$$(c) \qquad gr^2 = g'r'^2 \quad \text{ou} \quad \frac{g}{g'} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2.$$

4° Loi des hauteurs barométriques. — Pour un corps incompressible, le poids est proportionnel au produit de la gravité g par le volume préalablement ramené à la température de 0°. Or la pression p est le poids d'un volume de mercure égal à H à la température T et par conséquent égal à $\frac{H}{1 + MT}$ à la température 0°, en appelant M le coefficient 0,000179 de dilatation du mercure; donc p est proportionnel à $\frac{gH}{1 + MT}$; donc on a

$$(d) \qquad \frac{p}{p'} = \frac{H}{H'} \frac{g}{g'} \frac{1 + MT'}{1 + MT},$$

Les relations (a), (b), (c), (d) ont été établies en regardant les points M et M′ comme tout à fait quelconques et sans fixer les unités de longueur, de temps et de masse. Or supposons d'abord que le point M′ appartienne à la couche de l'atmosphère qui est en contact avec la Terre et soit dans ce qu'on appelle les *conditions atmosphériques normales*, c'est-à-dire celles pour les-

quelles le thermomètre et le baromètre marquent simultanément zéro et $0^m,76$, nous aurons d'abord $T' = 0$, et, d'après les expériences de Biot,

$$n'^2 - 1 = 0,000588768.$$

Prenons ensuite la longueur du mètre pour unité de longueur, la masse du mètre cube d'air pris dans les conditions atmosphériques normales pour unité de masse; et choisissons enfin l'unité de temps de façon que la durée de l'oscillation du pendule simple dont le fil de suspension a 1^m de longueur soit représentée par le nombre ϖ; nous aurons sur-le-champ, en nous rappelant ce qui a été dit plus haut pour la détermination des nombres qui expriment les différents éléments : $H' = 0,76$; r' qui est le nombre de mètres contenus dans le rayon a de la Terre $= 6366738$, $g' = 1$, $\rho' = 1$; quant au nombre p', nous le trouverons en observant qu'il est égal à celui qui représente le poids d'un volume de mercure exprimé par $0,76$ à $0°$, ou, d'après les expériences de Regnault, à celui qui représente le poids d'un volume d'air $10517,3$ fois plus grand et pris dans les conditions atmosphériques normales, lequel poids est représenté par 1; donc

$$p' = 0,76 \times 10517,3 = 7993,147.$$

Cela posé, les relations (a), (b), (c), (d) deviendront

$$(1) \qquad n^2 - 1 = 0,000588768.\rho,$$

$$(2) \qquad p = 7993,147\rho(1 + mT),$$

$$(3) \qquad g = \left(\frac{a}{r}\right)^2,$$

$$(4) \qquad p = 7993,147\,\frac{H}{0,76}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{1}{1 + MT},$$

qui permettront d'exprimer quatre des sept éléments de

l'atmosphère en fonction des trois autres et d'effectuer, en supposant que le point M soit un point de la trajectoire lumineuse, toutes les transformations que l'on peut faire subir à l'intégrale $\int \operatorname{tang} i \frac{dn}{n}$. Ajoutons, toutefois, que ces transformations nécessiteront encore la connaissance des valeurs des éléments pour l'extrémité B de la trajectoire lumineuse. Or, en supposant que le point M soit un point M_0 d'abord quelconque de la couche qui est en contact avec la surface de la Terre, ce que nous exprimerons en mettant l'indice zéro aux lettres qui expriment numériquement les différents éléments, les équations (1), (2), (3), (4) deviendront

$$n_0^2 - 1 = 0,000588768 \rho_0,$$
$$p_0 = 7993,15 \rho_0 (1 + m T_0),$$
$$g_0 = 1,$$
$$p_0 = 7993,15 \frac{H_0}{0,76} \frac{1}{1 + MT_0},$$

qui déterminent quatre des six nombres n_0, ρ_0, p_0, g_0, T_0, H_0 en fonction des deux autres ; si donc on prend pour M_0 l'extrémité B de la trajectoire lumineuse, on voit que $n_0^2 - 1$, ρ_0, p_0 pourront être considérés comme connus, car, B étant alors le lieu de l'observation, T_0 et H_0 seront donnés à l'aide du thermomètre et du baromètre, au moment de chaque observation.

Nous poserons, pour abréger,

$$0,000588786 \frac{H_0}{76} \frac{1}{(1 + MT_0)(1 + m T_0)} = 2\alpha,$$
$$7993,147 (1 + m T_0) = \beta,$$

α et β étant des constantes connues, ce qui nous donnera

$$n_0 = \sqrt{1 + 2\alpha}, \qquad \frac{p_0}{\rho_0} = \beta;$$

puis, nous bornant aux relations qui nous seront utiles, nous écrirons

$$n = \sqrt{1 + 2\alpha \frac{\rho}{\rho_0}}, \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1 + mT}{1 + mT_0},$$

ou, plus simplement,

$$n = \sqrt{1 + 2\alpha u}, \qquad v = u \frac{1 + mT}{1 + mT_0},$$

en posant

$$\frac{\rho}{\rho_0} = u, \qquad \frac{p}{p_0} = v.$$

Ces dernières relations nous permettent de donner à l'intégrale $\int \tang i \frac{dn}{n}$ la forme qui doit en rendre l'évaluation approchée la plus simple possible. Choisissons celle que l'on obtient en exprimant i et n en fonction de u et s, ce qui rendra d'abord nécessaire la connaissance, pour ces deux variables, de leurs valeurs limites, c'est-à-dire des valeurs qui correspondent à la limite inférieure et à la limite supérieure de l'intégrale ou encore à la couche supérieure de l'atmosphère et à la couche qui est en contact avec la Terre. Or, s'il s'agit de $u = \frac{\rho}{\rho_0}$, on trouve immédiatement o pour la limite inférieure et 1 pour la limite supérieure; s'il s'agit de s, la relation $\frac{a}{r} = 1 - s$ montre que la limite supérieure est o et que la limite inférieure, que nous appellerons S, a pour valeur $1 - \frac{a}{a + D} = \frac{D}{a + D}$, en appelant D la hauteur de l'atmosphère, laquelle hauteur ne dépasse pas 75^{km}, en sorte que

$$\frac{75000}{6366738 + 75000} = \frac{100000}{8588984}$$

est une limite supérieure de S.

Observons maintenant que la valeur de n est fournie

par l'équation

$$n = \sqrt{1 + 2\alpha u},$$

qui, différentiée logarithmiquement, donne

$$\frac{dn}{n} = \frac{\alpha\, du}{1 + 2\alpha u};$$

quant à la valeur de tang i, on la déduit de l'équation

$$nr \sin i = n_0 a \sin z_a,$$

que nous avons obtenue dans le paragraphe précédent, après une première intégration des équations différentielles de la trajectoire lumineuse. Si l'on y introduit les variables u et s, elle devient

$$\sin i = \frac{\sqrt{1 + 2\alpha}}{\sqrt{1 + 2\alpha u}} (1 - s) \sin z_a,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sqrt{1 + 2\alpha}(1 - s) \sin z_a}{\sqrt{1 + 2\alpha u}\sqrt{1 - \frac{(1 + 2\alpha)(1 - s)^2}{1 + 2\alpha u} \sin^2 z_a}},$$

et, en divisant haut et bas par $\cos z_a$, dans le second membre,

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sqrt{1 + 2\alpha}(1 - s) \operatorname{tang} z_a}{\sqrt{1 + 2\alpha u}\sqrt{1 + \left[1 - \frac{(1 + 2\alpha)(1 - s)^2}{1 + 2\alpha u}\right] \operatorname{tang}^2 z_a}}.$$

Cela étant, on a, pour la réfraction cherchée,

$$\begin{aligned} R = \int \operatorname{tang} i \frac{dn}{n} &= \alpha\sqrt{1 + 2\alpha} \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{1 - s}{(1 + 2\alpha u)^{\frac{3}{2}}} \\ &\times \left\{ 1 + \left[1 - \frac{(1 + 2\alpha)(1 - s)^2}{1 + 2\alpha u}\right] \operatorname{tang}^2 z_a \right\}^{-\frac{1}{2}} du. \end{aligned}$$

Cette valeur de R est exprimée en unités trigonomé-

triques ; si on veut l'avoir exprimée en secondes, il faudra encore la diviser par sin 1″ ou la multiplier par 206265 et l'on aura finalement

$$R = \alpha\sqrt{1+2\alpha}.206265 \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{1-s}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}} \times \left\{1+\left[1-\frac{(1+2\alpha)(1-s)^2}{1+2\alpha u}\right]\operatorname{tang}^2 z_a\right\}^{-\frac{1}{2}} du.$$

§ VI. — Démonstration de quelques propriétés qui facilitent la détermination de la réfraction R.

L'intégrale définie à laquelle nous sommes conduits, et où s est une fonction inconnue de u, paraît présenter encore de grandes difficultés ; on peut cependant en avoir une valeur aussi approchée que l'on veut pourvu que $\operatorname{tang} z_a$ soit suffisamment petit. Pour le montrer nous établirons d'abord quelques propriétés préliminaires :

Premier lemme. — *On a*

$$u\,ds = -\frac{\beta}{a}\,dv,$$

a et β ayant la même signification que plus haut.

En effet, on sait, ou plutôt on suppose, que l'atmosphère est en repos relatif par rapport à la terre sous l'influence de l'attraction de celle-ci, ce qui revient à dire qu'elle est en repos absolu sous l'influence de son poids. Or la condition d'équilibre d'une masse gazeuse, pour laquelle en chaque point M l'unité de surface supporte la pression p et l'unité de volume est soumise à l'influence d'une force extérieure F, s'exprime par la

condition

$$\delta p = \mathfrak{C}_e \mathrm{F},$$

en représentant par la caractéristique δ les différentielles totales relatives à un déplacement infiniment petit quelconque du point M et par la caractéristique $\mathfrak{C}_e$ les travaux élémentaires pour le même déplacement; mais, dans le cas particulier de l'atmosphère, F a pour grandeur le poids de l'unité du volume, c'est-à-dire le produit $g\rho$ de la gravité par la densité et pour direction celle du rayon vecteur r prise en sens contraire, de sorte que $\mathfrak{C}_e \mathrm{F} = - g\rho\, dr$: donc la condition d'équilibre devient

$$\delta p = - g\rho\, \delta r,$$

laquelle entraîne comme cas particulier

$$dp = - g\rho\, dr,$$

en désignant toujours par la caractéristique d les différentielles relatives à un déplacement infiniment petit effectué sur la trajectoire lumineuse.

Introduisant dans cette dernière équation u, v, s à la place de ρ, p, r, il vient

$$p_0\, dv = - \frac{g r^2 u \rho_0}{a}\, ds,$$

et, à cause de $gr^2 = a^2$,

$$u\, ds = - \frac{p_0}{\rho_0 a}\, dv$$

ou, d'après la définition de β,

$$u\, ds = - \frac{\beta}{a}\, dv. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — La propriété précédente conduit immédiatement à la valeur exacte de l'intégrale définie $\int_0^1 s\, du$

et à une limite supérieure de l'intégrale définie $\int_0^1 s^2\,du$, qui nous seront utiles.

En effet, en intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^1 s\,du = (us)_0^1 - \int_S^0 u\,ds = \int_0^1 \frac{\beta}{a}\,dv = \frac{\beta}{a}$$

et

$$\int_0^1 s^2\,du = (us^2)_0^1 - 2\int_S^0 su\,ds = 2\frac{\beta}{a}\int_0^1 s\,dv$$

$$= 2\frac{\beta}{a}\left[(vs)_0^1 - \int_S^0 v\,ds\right] = -2\frac{\beta}{a}\int_S^0 v\,ds;$$

mais la relation $v = u\,\frac{1+mT}{1+mT_0}$ montre que v est toujours plus petit que u, car, la température T s'abaissant à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère, on a

$$1+mT < 1+mT_0,$$

donc

$$\int_0^S v\,ds < \int_0^S u\,ds = -\frac{\beta}{a}\int_1^0 dv = \frac{\beta}{a},$$

donc

$$\int_0^1 s^2\,du < 2\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \int_0^1 s^2\,du = 2\theta\left(\frac{\beta}{a}\right)^2,$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1.

Deuxième lemme. — *L'expression*

$$1 - \frac{1+2\alpha}{1+2\alpha u}(1-s)^2$$

ou la suivante

$$1+2\alpha u - (1+2\alpha)(1-s)^2$$

est toujours positive pour toutes valeurs de s, *de* 0 *à* S, *et pour les valeurs correspondantes de* u.

Puisque v est toujours plus petit que u, il sera établi que

$$1+2\alpha u-(1+2\alpha)(1-s)^2$$

est positif, si nous démontrons qu'il en est ainsi de

$$1+2\alpha v-(1+2\alpha)(1-s)^2.$$

Or cette fonction est nulle pour $s=0$, car alors $v=1$: il suffit donc de faire voir qu'elle est croissante avec s, ou que sa dérivée par rapport à s

$$2\alpha\frac{dv}{ds}+2(1+2\alpha)(1-s) \quad \text{ou} \quad 2(1+2\alpha)(1-s)-2\frac{\alpha}{\beta}au$$

est positive; par conséquent, que l'on a

$$ur<\frac{\beta}{\alpha},$$

ou, en remplaçant α et β par leur valeur,

$$ur.294384\,\frac{H_0}{0,76}<10^7.799315(1+mT_0)^2(1+MT_0).$$

Mais, dans les applications à l'Astronomie, on suppose toujours

$$0,63<H_0<0,789 \qquad \text{et} \qquad -30<T_0<50,$$

ce qui donne

$$0,82894<\frac{H_0}{0,76}<1,0382,$$
$$0,88987<(1+mT_0)<1,1836,$$
$$0,99463<(1+MT_0)<1,00895,$$

et

$$\bar{1},9185493<\log\frac{H_0}{0,76}<0,01622810,$$
$$\bar{1},9493266<\log(1+mT_0)<0,0732050,$$
$$\bar{1},9976616<\log(1+MT_0)<0,0038696.$$

En remplaçant, dans le premier membre de l'inégalité

qu'il s'agit de vérifier, r, u, $\frac{H_0}{0,76}$ par leur valeur maxima, c'est-à-dire r par $a+D=6441738$, u par 1, $\frac{H}{0,76}$ par $1,0382$, puis, dans le deuxième membre, $1+mT_0$, $1+MT_0$ par leur valeur minima, c'est-à-dire $1+mT_0$ par $0,88987$, et $1+MT_0$ par $0,99463$, afin de se placer dans le cas le plus défavorable, qui est celui auquel il suffit d'avoir égard, on voit que tout se réduit à vérifier l'inégalité

$$6441738.294384.1,0382 < 10^7.799315.\overline{0,88987}^2.0,99463$$

ou

$$10^2.6,441738.2,9439.1,0382 < 7,99315.\overline{8,8987}^2.9,9463$$

ou, *a fortiori*,

$$10^2.6,4418.2,9439.1,0382 < 7,9931.\overline{8,8987}^2.9.9463.$$

Substituant à cette inégalité, l'inégalité logarithmique correspondante et observant que : 1°

$$\begin{aligned} l.10^2 &= 2 \\ l.6,4418 &= 0,8090072 \\ l.2,9439 &= 0,4689231 \\ l.1,0382 &= 0,0162810 \\ \text{ce qui donne...}\quad & \overline{3,2942113} \end{aligned}$$

pour le premier membre de la nouvelle inégalité, et, 2°

$$\begin{aligned} l.7,9931 &= 0,9027152 \\ 2l.8,8987 &= 1,8986532 \\ l.9,9463 &= 0,9976616 \\ \text{ce qui donne...}\quad & \overline{3,7990300} \end{aligned}$$

pour le second membre, on voit que l'inégalité logarithmique est satisfaite et, par suite, que l'inégalité primitive l'est aussi. (*A suivre.*)

SOLUTION DE LA QUESTION DU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE (1886);

PAR M. R. DE CRÈS,
Ingénieur civil.

On considère les courbes du troisième degré C, *représentées par l'équation*

$$(1) \qquad x^2y + a^2x = \lambda,$$

où λ *désigne un paramètre variable :*

1° *Démontrer qu'il existe deux courbes de cette espèce, tangentes à une droite quelconque* D *du plan ayant pour équation*

$$(2) \qquad y = mx + p,$$

et calculer les coordonnées (α, β), (α', β') *des deux points de contact* M *et* M'.

Pour qu'une courbe C touche la droite D en un point dont l'abscisse est x', il faut et il suffit que l'équation

$$mx^3 + px^2 + a^2x - \lambda = 0,$$

aux abscisses des points communs à la courbe et à la droite, ait pour racines

$$x', \quad x', \quad -\left(\frac{p}{m} + 2x'\right);$$

ce qui, en vertu des relations entre les coefficients et les racines, s'exprime par les relations

$$(3) \qquad 3mx'^2 + 2px' + a^2 = 0,$$

$$(4) \qquad x'^2\left(2x' + \frac{p}{m}\right) = \lambda.$$

L'équation (3) donne pour x' deux valeurs réelles ou imaginaires, à chacune desquelles répond une valeur de λ fournie par la relation (4).

Il y a donc deux courbes C tangentes à la droite D et les coordonnées des deux points de contact $M(\alpha, \beta)$, $M'(\alpha', \beta')$ sont données par les formules

$$(5) \qquad \alpha = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 3ma^2}}{3m},$$

$$(6) \qquad \beta = m\alpha + p = \frac{2p + \sqrt{p^2 - 3ma^2}}{3},$$

$$(5') \qquad \alpha' = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 3ma^2}}{3m},$$

$$(6') \qquad \beta' = m\alpha' + p = \frac{2p - \sqrt{p^2 - 3ma^2}}{3}.$$

2° *Distinguer les droites* D *pour lesquelles les deux points* M *et* M' *sont réels des droites pour lesquelles ils sont imaginaires. Examiner pour quelles positions de la droite* D *les deux points* M *et* M' *viennent se confondre en un seul, et trouver, dans ce cas, le lieu décrit par le point de contact.*

Les points M et M' sont confondus lorsqu'on a

$$(7) \qquad p^2 - 3ma^2 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque la droite D a une équation de la forme

$$y = mx \pm a\sqrt{3m};$$

mais cette droite enveloppe l'hyperbole

$$(8) \qquad 4xy + 3a^2 = 0;$$

et l'équation aux abscisses des points communs à cette hyperbole et à la droite (1) montre que cette droite (1) coupe l'hyperbole ou lui est extérieure suivant que l'expression $p^2 - 3ma^2$ est positive ou négative. Donc

les points M et M' sont réels et distincts, confondus ou imaginaires suivant que la droite D coupe l'hyperbole (8), la touche ou lui est extérieure.

Lorsque les points M et M' sont confondus, les valeurs (5) et (6), (5') et (6') se réduisent à

$$\alpha_1 = -\frac{p}{3m}, \qquad \beta_1 = \frac{2p}{3},$$

et il suffit d'éliminer p et m entre ces relations et la condition (7) pour avoir l'équation

$$3\alpha_1\beta_1 + 2a^2 = 0,$$

du lieu décrit par le point de contact; c'est une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.

3° *Connaissant les coordonnées* (α, β) *du point de contact* M *d'une courbe* C *avec une droite* D, *trouver les coordonnées* (α', β') *du second point de contact* M' *situé sur* D. *Construire la courbe décrite par le point* M' *lorsque le point* M *décrit la droite*

(9) $$\beta = \alpha - 2a.$$

Les abscisses α et α' étant les racines de l'équation (3), on a

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = -\frac{2p}{a^2}, \qquad \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha'} = \frac{3m}{a^2};$$

et, en portant ces valeurs de m et de p dans

$$\beta = m\alpha + p, \qquad \beta' = m\alpha' + p,$$

on obtient les relations

$$\beta = -\frac{a^2}{6}\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{3}{\alpha}\right); \qquad \beta' = -\frac{a^2}{6}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha'}\right),$$

d'où l'on déduit, soit

(10) $$\alpha' = -\frac{a^2\alpha}{3(2\alpha\beta + a^2)}, \qquad \beta' = \frac{9\alpha\beta + 4a^2}{3\alpha},$$

soit

$$\alpha = -\frac{a^2\alpha'}{3(2\alpha'\beta' + a^2)}, \qquad \beta = \frac{9\alpha'\beta' + 4a^2}{3\alpha'}.$$

Enfin, il suffit de porter ces valeurs de α et de β dans (9) pour avoir l'équation

$$18x^2y^2 + 12ax^2y + 17a^2xy + a^2x^2 + 6a^3x + 4a^4 = 0,$$

du lieu que décrit le point M′ lorsque le point M parcourt la droite (9) (nous avons mis x et y au lieu de α' et β'). C'est une quartique dont la construction n'offre aucune difficulté, puisque l'équation est du second degré soit par rapport à x, soit par rapport à y. On peut aussi se servir des expressions (10), après y avoir remplacé β par la valeur (9), pour construire la courbe qui est unicursale.

MM. Chambon et Barisien ont aussi envoyé des solutions de cette question.

SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DONNÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1886);

PAR M. BARISIEN,
Capitaine d'Infanterie.

Étant donnés dans un plan une droite D, *un point* O *sur cette droite et une droite* D′, *on demande :*

1° *De former l'équation générale des coniques qui touchent la droite* D *au point* O *et qui ont la droite* D′ *pour directrice;*

2° *De montrer que deux de ces coniques passent par un point quelconque* P *du plan. Déterminer la région où doit se trouver le point* P *pour que ces deux courbes*

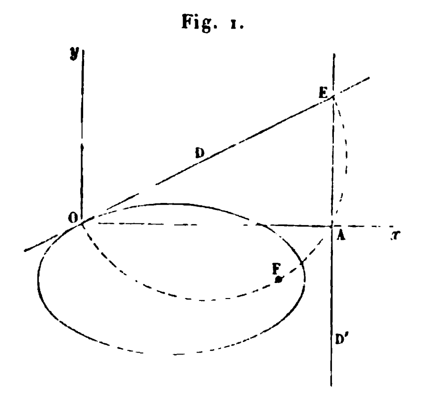
soient réelles, et, dans ce cas, en reconnaître le genre;

3° *Les deux coniques du faisceau considéré, qui passent en un point* P, *se coupent en un second point* P'; *calculer les coordonnées du point* P' *en fonction de celles du point* P; *et, en supposant que le point* P *décrive une ligne* C, *trouver quelle doit être la forme de l'équation de cette ligne pour que le point* P' *décrive la même ligne.*

I.

Prenons des axes de coordonnées rectangulaires, l'origine étant au point O (*fig.* 1) et l'axe des x étant la perpendiculaire abaissée de O sur la droite D'.

Fig. 1.



Appelons a la distance OA du point O à la droite D' : cette quantité a sera toujours positive si l'on a soin de diriger la partie positive de l'axe des x du côté de D'.

Soit aussi m le coefficient angulaire de la droite D, qu'on peut toujours supposer positif en choisissant convenablement le sens positif de l'axe des y.

Les axes de la conique sont dès lors parallèles à Ox et Oy; d'ailleurs la conique est tangente à la droite D au

point O ; son équation est donc de la forme

$$(1)\qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{C} + mx - y = 0,$$

A et C étant des paramètres variables.

Il reste à exprimer que la conique a pour directrice la droite D'. Si α et β sont les coordonnées du foyer F correspondant, l'équation de la conique pourra aussi s'écrire

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \lambda(x-a)^2$$

ou, en développant,

$$(2)\quad x^2(1-\lambda) + y^2 - 2(\alpha - \lambda a)x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - \lambda a^2 = 0;$$

l'identification des équations (1) et (2) donne, entre les cinq paramètres α, β, λ, A et C, les quatre relations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \lambda a^2, \\ \alpha + \beta m &= \lambda a, \\ 2\beta &= C, \\ A\lambda &= A - C. \end{aligned}\right.$$

Les trois dernières donnent α, β et λ en fonction de A et C, et, en portant ces valeurs dans la première, on trouve

$$(4)\qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{A} + \frac{A(m^2+1)}{4a(Am+a)}.$$

L'équation générale demandée est donc, en fonction du paramètre variable A,

$$(5)\qquad \frac{1}{A}(x^2+y^2) + \frac{A(m^2+1)y^2}{4a(a+Am)} + mx - y = 0.$$

Remarque. — *Si l'on élimine λ entre les deux premières relations* (3), *on obtient l'équation*

$$(6)\qquad \alpha^2 + \beta^2 - a\alpha - am\beta = 0,$$

qui montre incidemment que le lieu des foyers des co-

niques de l'énoncé est un cercle passant par les points O, A *et par le point d'intersection* E *des droites* D *et* D'.

II.

Soient X, Y les coordonnées d'un point P du plan. Nous aurons alors, pour déterminer les coniques (5) qui passent par ce point, l'équation

$$\frac{1}{A}(X^2+Y^2)+\frac{A(m^2+1)Y^2}{4a(Am+a)}+mX-Y=0.$$

Cette équation du second degré en A, développée et ordonnée par rapport à A, devient

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &A^2[(m^2+1)Y^2+4am(mX-Y)]\\ &\qquad+4aA[m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)]\\ &\qquad\qquad+4a^2(X^2+Y^2)=0.\end{aligned}\right.$$

Si A' et A'' sont les deux racines, on les portera dans (5), et l'on aura ainsi les équations des deux coniques passant par le point P.

Pour que les deux valeurs de A soient réelles, il faut avoir

$$\begin{aligned}&[m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)]^2\\ &\quad-(X^2+Y^2)[(m^2+1)Y^2+4am(mX-Y)]\geqq 0,\end{aligned}$$

inégalité qui se réduit à

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}&(Y-mX)[(X^2+Y^2)(mX+Y-2am)\\ &\qquad+a^2(mX-Y)]\leqq 0.\end{aligned}\right.$$

Le facteur placé dans la première parenthèse représente la droite D; quant à la seconde parenthèse, il est facile de voir qu'elle représente une strophoïde oblique ayant le point A pour point double et la droite

$$mX+Y-2am=0$$

pour asymptote; elle passe en outre par le point O où

elle touche la droite D et rencontre son asymptote à l'intersection des droites D et D'.

Il est à remarquer que la droite D et la strophoïde forment l'enveloppe de toutes les coniques (5).

La région du plan, positive par rapport à la strophoïde, négative par rapport à la droite D, ou inversement, négative par rapport à la strophoïde et positive par rapport à la droite D, sera telle que les coordonnées des points de cette région vérifient l'inégalité (8). Donc, quand le point P sera dans ces régions, les deux coniques passant par ce point seront toujours réelles ([1]). Dans les autres parties du plan, les coniques seront imaginaires.

Il reste à voir ce qui arrive lorsque le point P sera, soit sur la droite D, soit sur la strophoïde. Les deux valeurs de A seront alors confondues en une seule

$$A = -\frac{2a(X^2+Y^2)}{m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)}.$$

La conique répondant à cette valeur sera une conique double.

1° Si le point P est sur la droite D, on a

$$Y = mX,$$

et A devient

$$A = -\frac{2a}{m}.$$

En portant cette valeur dans (5), on trouve que la conique double passant par P se compose des deux droites

$$(y - mx)(y + mx - 2am = 0.$$

La première de ces droites est la droite D elle-même. Quant à la seconde, elle ne passe évidemment par le

---

([1]) Les régions où doit se trouver le point P pour donner des coniques réelles sont marquées sur les figures par des hachures.

point P que lorsque celui-ci est à l'intersection de D et D'.

2° Si le point P est sur la strophoïde, on a

$$(X^2+Y^2)(mX+Y-2am)+a^2(mX-Y)=0,$$

et A devient

$$A=\frac{2a^2}{mX+Y-3am}.$$

Nous verrons tout à l'heure le moyen de distinguer la nature de la conique double passant par un point de la strophoïde.

Étudions la nature des coniques passant par un point quelconque P. Le déterminant Δ de ces coniques est

$$\Delta=-\frac{1}{AC}=-\frac{[(Am+2a)^2+A^2]}{4aA^2(Am+a)};$$

donc, puisque a est positif, la conique est une ellipse ou une hyperbole, suivant que l'on a

$$Am+a>0 \quad \text{ou} \quad Am+a<0.$$

Si A' et A'' sont les deux racines de l'équation (7), nous avons

$$(9) \qquad A'A''=\frac{4a^2(X^2+Y^2)}{(m^2+1)Y^2+4am(mX-Y)},$$

$$(10) \qquad A'+A''=-\frac{4a[m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)]}{(m^2+1)Y^2+4am(mX-Y)}.$$

Le dénominateur commun de A'A'' et (A' + A'') représente une parabole tangente à la droite D en O, ayant son axe parallèle à l'axe des x et qu'il est facile de construire.

Le numérateur de (A' + A'') représente un cercle tangent également à la droite D au point O et de rayon $\frac{a\sqrt{1+m^2}}{2m}$.

La nature de chacune des coniques répondant à A'

et A'' est indiquée par le signe des quantités

$$A'm + a, \quad A''m + a.$$

Remarquons que le produit de ces deux quantités est

$$\begin{aligned}(A'm + a)(A''m + a) &= A'A''m^2 + am(A' + A'') + a^2 \\ &= A'A''\left(m^2 + am\,\frac{A' + A''}{A'A''} + \frac{a^2}{A'A''}\right).\end{aligned}$$

En vertu des relations (9) et (10), ce produit se réduit à

$$\frac{(m^2+1)Y^2}{4(X^2+Y^2)}A'A'',$$

ce qui indique que son signe est le même que celui de $A'A''$.

Si donc A' et A'' sont de même signe, les deux coniques sont du même genre; si, au contraire, A' et A'' sont de signes différents, les deux coniques sont de genres différents.

1° Examinons d'abord le cas où A' et A'' sont de même signe. Il en résulte l'inégalité

$$(m^2+1)Y^2 + 4am(mX - Y) > 0,$$

qui exprime que le point P se trouve dans la région positive de la parabole. A' et A'', étant de même signe, peuvent être, ou tous deux positifs, ou tous deux négatifs.

Si A' et A'' sont tous deux positifs, on a en même temps

$$A'm + a > 0, \qquad A''m + a > 0.$$

Les coniques correspondantes sont, par suite, deux ellipses, et alors, à cause du signe de $(A' + A'')$, on a l'inégalité

$$m(X^2 + Y^2) + a(mX - Y) < 0,$$

Dans ce cas, le point P est à la fois dans la région

positive de la parabole et dans la région négative du cercle.

Si A′ et A″ sont tous deux négatifs, et si en même temps

$$A'm + a < 0, \qquad A''m + a < 0,$$

les coniques correspondantes sont deux hyperboles et l'on a

$$m(X^2 + Y^2) + a(mX - Y) > 0.$$

Le point P se trouve alors à la fois dans les régions positives de la parabole et du cercle.

Mais il peut aussi arriver que, outre les inégalités

$$A' < 0, \qquad A'' < 0,$$

on ait encore

$$A'm + a > 0, \qquad A''m + a > 0.$$

Les coniques sont alors deux ellipses. En divisant ces deux inégalités respectivement par les quantités négatives A′ et A″ et ajoutant membre à membre, il vient

$$a\left(\frac{A' + A''}{AA''}\right) + 2m < 0,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des relations (9) et (10),

$$m(X^2 + Y^2) - a(mX - Y) < 0.$$

Le premier membre de cette inégalité représente un cercle symétrique par rapport au point O du cercle déjà considéré. Si donc le point P est à l'intérieur du cercle, ce qui arrive pour la boucle de la strophoïde, les deux coniques sont des ellipses.

2° Soit maintenant le cas où A′ et A″ sont de signes contraires. Alors

$$(m^2 + 1)Y^2 + 4am(mX - Y) < 0,$$

ce qui indique que le point P est dans la région négative de la parabole.

Les deux coniques sont dans ce cas, l'une une ellipse, l'autre une hyperbole.

Revenons au cas où le point P est sur la strophoïde : nous avons vu qu'alors la valeur double de A était

$$A = \frac{2a^2}{mX + Y - 3am},$$

d'où

$$Am + a = \frac{a(mX + Y - am)}{mX + Y - 3am}.$$

Si donc on trace les deux droites parallèles

$$mX + Y - 3am = 0,$$
$$mX + Y - am = 0,$$

on voit que, si le point P est sur la portion de strophoïde située entre ces deux droites, $(Am + a)$ est négatif; la conique double est alors une hyperbole. Sur le reste de la strophoïde, la conique double est une ellipse.

Si le point P est à l'intersection de la strophoïde et de la droite

$$mX + Y - 3am = 0,$$

la conique est une parabole double.

Si le point P est à l'intersection de la strophoïde et de la droite

$$mX + Y - 3am = 0,$$

c'est-à-dire au point double, on a

$$Am + a = 0,$$

d'où

$$A = -\frac{a}{m}.$$

L'équation (5) de la conique devient dans ce cas

$$y^2 = 0,$$

de sorte qu'au point double les deux coniques sont représentées par la droite quadruple axe des x.

Il est du reste facile de voir que, lorsque le point P sera sur l'axe des x, l'une des coniques sera la droite double axe des x.

Voyons ce qui se passe lorsque le point P est sur la parabole. Alors

$$(m^2+1)Y^2+4am(mX-Y)=0;$$

il en résulte

$$A'=0, \qquad A''=-\frac{a(X^2+Y^2)}{m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)},$$

c'est-à-dire que la conique A′ est la parabole elle-même. Quant à la conique A″, on a

$$A''m+a=-\frac{a}{4m}\,\frac{(m^2+1)Y^2}{m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)}.$$

Donc, pour la portion de parabole située à l'extérieur du cercle, la conique A″ est une hyperbole; pour la portion de parabole située à l'intérieur du cercle, cette conique est une ellipse.

La discussion que nous venons de présenter est tout à fait générale; elle ne préjuge rien sur les situations respectives de la strophoïde, du cercle et de la parabole.

Pour voir comment sont situées ces courbes, cherchons d'abord les points d'intersection de la droite

$$mX+Y-3am=0,$$

avec la strophoïde

$$(X^2+Y^2)(mX+Y-2am)+a^2(mX-Y)=0.$$

Cette dernière équation devient, en tenant compte de la première

$$m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)=0.$$

Par suite, l'équation homogène du second degré représentant les droites joignant les points d'intersection à

l'origine est

$$3m^2(X^2+Y^2)+m^2X^2-Y^2=0,$$

d'où

(11) $$Y=\pm\frac{2m}{\sqrt{1-3m^2}}X.$$

Les deux points d'intersection sont donc chacun sur une des deux droites (11) passant par l'origine et également inclinées sur les axes.

Voyons comment se coupent la strophoïde et le cercle. Leurs équations sont

$$(X^2+Y^2)(mX+Y-2am)=a^2(Y-mX)$$
$$m(X^2+Y^2)=a\ (Y-mX).$$

En les divisant membre à membre, on trouve

$$mX+Y=3am,$$

ce qui indique que le cercle et la strophoïde se coupent sur cette droite.

D'autre part, les équations du cercle et de la parabole étant

$$m(X^2+Y^2)=a(Y-mX),$$
$$(m^2+1)Y^2=4am(Y-mX),$$

on a, en multipliant en croix,

$$4m^2(X^2+Y^2)=(m^2+1)Y^2,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (11).

On trouve aussi facilement que la strophoïde et la parabole se coupent sur la droite

$$mX+Y=3am.$$

Il faut donc conclure de là cette propriété remar-

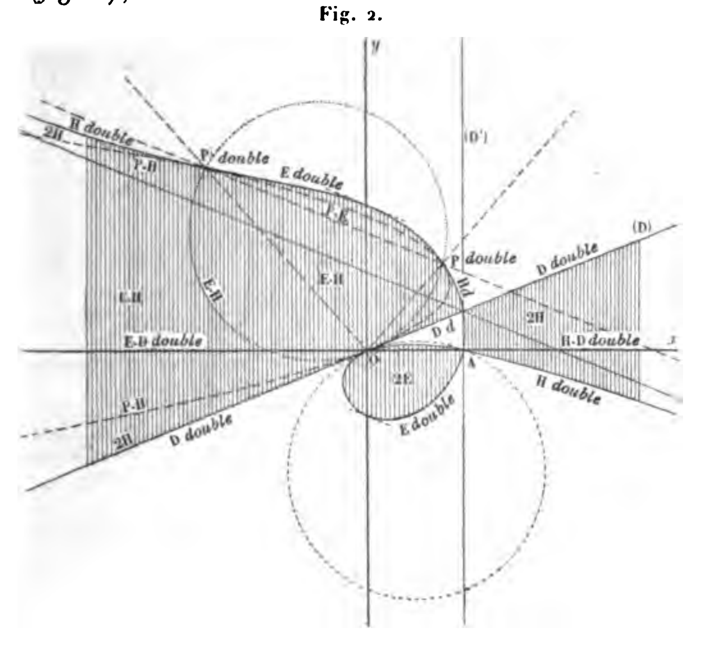
quable, que *la strophoïde, la parabole et le cercle ont pour corde commune cette dernière droite.*

Il est facile de voir, de plus, qu'en leurs points d'intersection la parabole et la strophoïde sont tangentes.

L'équation (11) montre que :

Si $m < \frac{1}{\sqrt{3}}$, ces courbes se coupent en des points réels (*fig.* 2);

Fig. 2.



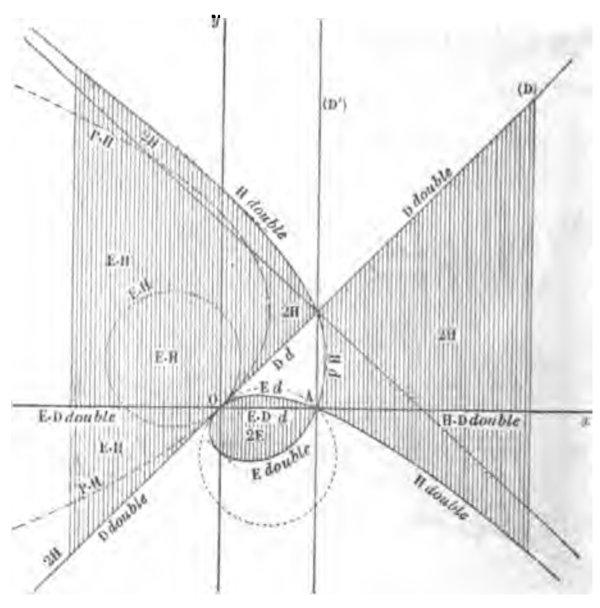
Si $m > \frac{1}{\sqrt{3}}$, elles ne se rencontrent qu'en des points imaginaires (*fig.* 3);

Si $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ces courbes sont tangentes (*fig.* 4).

Nous indiquons sur trois figures différentes ce que deviennent les régions réelles et imaginaires et la nature des coniques dans ces trois cas.

Pour construire facilement chacune des courbes, strophoïde, parabole et cercle, cherchons les ordonnées de ces courbes aux points où elles rencontrent l'axe des y.

Fig. 3.



L'ordonnée positive de la strophoïde est

$$Y_s = a\sqrt{1+m^2} + am.$$

Pour la parabole, on a

$$Y_p = \frac{4am}{m^2+1};$$

enfin, pour le cercle,

$$Y_c = \frac{a}{m}.$$

Il est facile de voir que, quel que soit m, on a toujours

$$Y_s > Y_p,$$

tandis que l'on a

$$Y_p > Y_c \quad \text{si} \quad m > \frac{1}{\sqrt{3}},$$

et

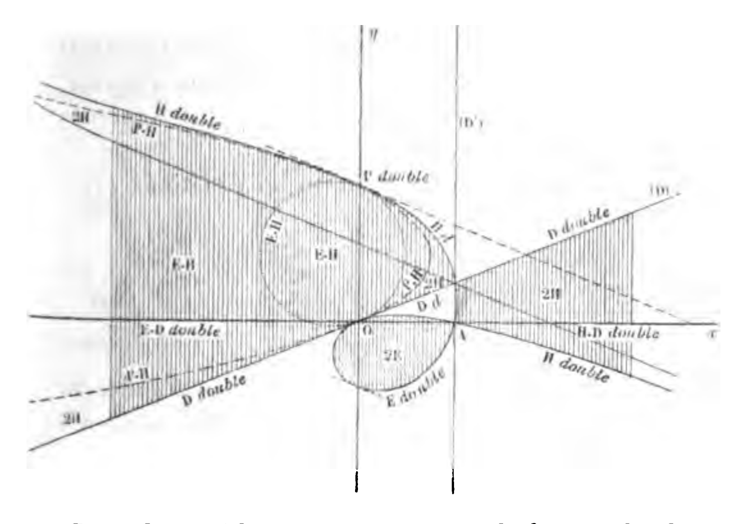
$$Y_p < Y_c \quad \text{si} \quad m < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pour $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a

$$Y_s = Y_p = Y_e.$$

Les trois courbes sont alors tangentes au point $[X = o,\ Y = a\sqrt{3}]$.

Fig. 4.



Rappelons ici le tracé géométrique de la strophoïde. On mènera par le point O une droite rencontrant en I la droite

$$mX + Y = am,$$

on prendra sur OI et de part et d'autre de I

$$IM = IM' = IA.$$

Les points M et M' appartiendront à la strophoïde.

Il faut aussi remarquer qu'aux deux points où la strophoïde coupe l'axe des y, la tangente est parallèle à l'asymptote.

III.

Nous avons vu que les valeurs A' et A'' répondant aux deux coniques passant par le point P de coordonnées X et Y sont fournies par l'équation (7).

Les équations de ces deux coniques sont

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{A'} + \dfrac{y^2}{C'} + mx - y = 0, \\[2mm] \dfrac{x^2}{A''} + \dfrac{y^2}{C''} + mx - y = 0. \end{cases}$$

Comme ces deux coniques sont tangentes à la droite D en O, elles n'ont que deux autres points d'intersection, le point P(X, Y) et le point P' dont nous désignerons les coordonnées par X_1 et Y_1.

En retranchant l'une de l'autre les équations (12), on obtient

$$y = \pm x \sqrt{\frac{\dfrac{1}{A''} - \dfrac{1}{A'}}{\dfrac{1}{C'} - \dfrac{1}{C''}}},$$

ce qui indique que les droites OP et OP' sont également inclinées sur les axes. Or, d'après la relation (4), on a

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{A'} + \frac{A'(m^2+1)}{4a(A'm+a)},$$

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{A''} + \frac{A''(m^2+1)}{4a(A''m+a)},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{C'} - \frac{1}{C''} = \left(\frac{1}{A'} - \frac{1}{A''}\right)\left[\frac{4(A'm+a)(A''m+a) - (m^2+1)A'A''}{4(A'm+a)(A''m+a)}\right].$$

Mais nous avons déjà vu que

$$(A'm+a)(A''m+a) = \frac{(m^2+1)\,Y^2}{4(X^2+Y^2)}\,A'A'';$$

donc

$$\frac{1}{C'} - \frac{1}{C''} = \left(\frac{1}{A''} - \frac{1}{A'}\right)\frac{X^2}{Y^2};$$

et, en effet, les droites OP et OP′ ont bien pour équations

$$y = \pm \frac{Y}{X}x.$$

Celle de OP étant

$$y = \frac{Y}{X}x,$$

on a, pour celle de OP′,

$$y = -\frac{Y}{X}x.$$

Cherchons l'abscisse du point P′ d'intersection de cette droite avec la première des coniques (12), par exemple, il viendra

$$x = -\frac{Xm(X+Y)}{\frac{X^2}{A'} + \frac{Y^2}{C'}},$$

mais

$$\frac{X^2}{A'} + \frac{Y^2}{C'} = Y - mX.$$

Donc l'abscisse x, qui est justement X_1, est, en fonction de X et Y,

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{X(mX+Y)}{mX-Y}, \\ Y_1 &= -\frac{Y(mX+Y)}{mX-Y}. \end{aligned}\right.$$

On en déduit les deux relations

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{Y_1^2}{X_1^2} &= \frac{Y^2}{X^2}, \\ mX_1 + Y_1 &= mX + Y. \end{aligned}\right.$$

Par suite, si l'on considère l'équation des courbes de la forme

$$F\left[\frac{Y^2}{X^2}, (mX+Y), k\right] = 0,$$

k étant une constante, ces courbes seront à la fois le lieu des points P et P'.

Il est à remarquer que les valeurs de $X_1 Y_1$ sont indépendantes de a.

On peut observer aussi que l'équation de la droite PP' est

$$y + mx = Y + mX,$$

ce qui indique que la droite PP' est parallèle à l'asymptote de la strophoïde.

Remarque. — Considérons le cas où $m = 0$. L'équation (7) devient alors

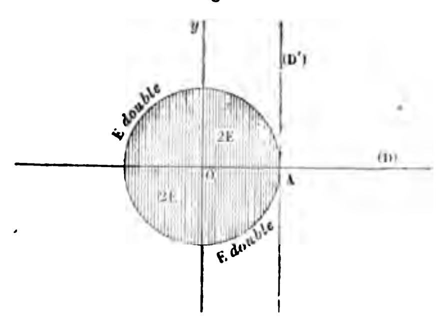
$$A^2Y^2 - 4a^2YA + 4a^2(X^2 + Y^2) = 0.$$

Dans ce cas, l'axe des x représente à la fois le cercle et la parabole. La condition (8) devient

$$Y^2(X^2 + Y^2 - a^2) \leqq 0,$$

de sorte qu'il faut que le point P soit à l'intérieur du cercle de rayon OA (*fig.* 5) pour que les deux co-

Fig. 5.



niques passant par ce point soient réelles. Ce seront toujours deux ellipses, car avec $m = 0$ on a $Am + a = a$, quantité toujours positive.

IV.

Dans le cas particulier de $m = \infty$, les formules générales sont en défaut. Il faut alors traiter directement la question.

L'équation générale des coniques tangentes à l'origine à l'axe des y est

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{C} + x = 0.$$

Le foyer est sur l'axe des x à une distance α de l'origine, de sorte que l'équation de ces coniques peut aussi s'écrire

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \lambda(x - a)^2;$$

identifiant ces deux équations, nous avons les relations

$$A(1 - \lambda) = C = 2(\lambda a - \alpha),$$
$$\alpha^2 = \lambda a^2.$$

En éliminant α et λ entre trois équations, on trouve sans difficulté

$$C = \frac{4aA(A + a)}{(A + 2a)^2}.$$

L'équation générale des coniques est donc

$$\frac{x^2}{A} + \frac{(A + 2a)^2}{4aA(A + a)}y^2 + x = 0.$$

Les deux coniques passant par un point $P(X, Y)$ sont donc déterminées par l'équation en A

$$A^2(Y^2 + 4aX) + 4Aa(X^2 + Y^2 + aX) + 4a^2(X^2 + Y^2) = 0,$$

d'où

$$A' + A'' = -\frac{4a(X^2 + Y^2 + aX)}{Y^2 + 4aX}, \qquad A'A'' = \frac{4a^2(X^2 + Y^2)}{Y^2 + 4aX}.$$

Les déterminants Δ' et Δ'' des coniques répondant à

A' et A'' sont donc

$$\Delta' = -\frac{1}{A'C'} = -\frac{(A'+2a)^2}{4aA'^2(A'+a)},$$

$$\Delta'' = -\frac{1}{A''C'} = -\frac{(A''+2a)^2}{4aA''^2(A''+a)},$$

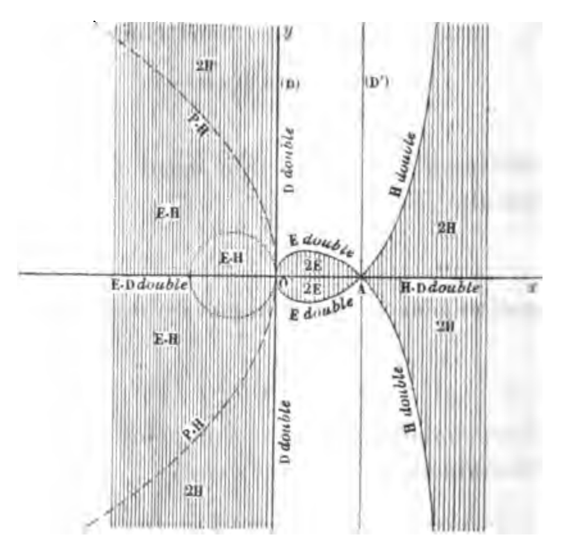
par suite

$$\Delta'\Delta'' = \frac{(A'+2a)^2(A''+2a)^2}{16a^2A'^2A''^2(A'+a)(A''+a)}$$

et

$$(A'+a)(A''+a) = A'A''\left(1 + a\frac{A'+A''}{A'A''} + \frac{a^2}{A'A''}\right)$$
$$= \frac{4(X^2+Y^2)}{A'A''Y^2}.$$

Fig. 6.



Donc, le signe de $\Delta'\Delta''$ est le même que celui de $A'A''$, comme dans le cas général.

La condition de réalité des racines de A est

$$X[(X-2a)(X^2+Y^2)+a^2X] \geq 0$$

La strophoïde est ici une strophoïde droite (*fig.* 6).

La discussion se fait absolument comme dans le cas général.

MM. Chambon et Abelin ont aussi envoyé des solutions de cette question.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1887.

Mathématiques spéciales.

Première question. — On représente par $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m$ les coordonnées des points d'intersection de deux courbes algébriques dont les équations, mises sous forme entière, sont

$$f(x,y) = 0, \qquad F(x,y) = 0.$$

On suppose que tous ces points d'intersection sont simples et à distance finie.

1° Montrer que, pour chaque valeur de i, on peut écrire

$$\begin{gathered} f(x,y) = (x - x_i)\, a_i(x,y) + (y - y_i)\, b_i(x,y), \\ F(x,y) = (x - x_i)\, A_i(x,y) + (y - y_i)\, B_i(x,y), \\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{gathered}$$

les coefficients a_i, b_i, A_i, B_i étant des polynômes en x, y.

2° On pose

$$\varphi_i(x,y) = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ A_i & B_i \end{vmatrix}$$

et

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{i=m} C_i\, \varphi_i(x,y).$$

et l'on demande de déterminer les constantes C_i, de ma-

nière que le polynôme Φ prenne, pour $x = x_i$ et $y = y_i$, une valeur donnée u_i. Montrer que le polynôme Φ, ainsi obtenu, comprend comme cas particulier la formule d'interpolation de Lagrange.

3° Démontrer que tous les polynômes en x et y qui, pour $x = x_i$ et $y = y_i$, prennent la valeur u_i, peuvent être mis sous la forme

$$\Phi + Mf + NF,$$

M et N étant des polynômes en x et en y.

Seconde question. — Soient $f = 0$, $F = 0$ les équations de deux coniques u et U, et λ_1, λ_2, λ_3 les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le discriminant de la fonction $f - \lambda F$; trouver la relation entre λ_1, λ_2, λ_3 exprimant la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse inscrire dans u un quadrilatère circonscrit à U.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'Analyse infinitésimale à l'usage des personnes qui étudient cette Science en vue de ses applications mécaniques et physiques; par M. *J. Boussinesq*, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Deux Volumes in-8°. — Tome I : *Calcul différentiel* (en vente); Tome II : *Calcul intégral* (sous presse.) Paris, Gauthier-Villars, 1887.

Cet Ouvrage, que recommande assez le nom de son auteur, s'adresse, comme son titre l'indique, à un public différent du nôtre : chaque Volume est divisé en deux fascicules consacrés l'un à la partie élémentaire, l'autre aux parties plus difficiles et moins usuelles du Calcul infinitésimal. On y remarque, outre

les théories classiques exposées à un point de vue spécial, des recherches originales sur les paramètres différentiels des fonctions de point, l'isotropie, les courbes asymptotes, les lignes de déclivité maxima et minima des surfaces et sur un grand nombre d'autres questions importantes de Mathématiques appliquées.

Cours d'Analyse de l'École Polytechnique; par M. *C. Jordan,* Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — Tome III : *Equations différentielles.* Paris, Gauthier-Villars, 1887.

La théorie des équations différentielles a été considérablement perfectionnée de nos jours, grâce aux travaux de Briot et Bouquet, Poincaré, Darboux, Fuchs, Halphen, Picard sur les équations différentielles ordinaires, et à ceux de Jacobi, Lie et Mayer sur les équations aux dérivées partielles; on ne saurait plus s'en tenir sur ce sujet à l'analyse de Lagrange et de Monge, et l'introduction des nouvelles doctrines s'impose d'une façon impérieuse. Le résumé, à la fois précis et succinct, qu'en donne M. Jordan, facilitera singulièrement la propagation de ces vues fécondes.

Ce Volume renferme en outre une exposition lumineuse et complète du Calcul des variations; M. Jordan a consacré à ce sujet trois Chapitres fort intéressants. Le premier est relatif à la variation des intégrales simples et contient des applications aux équations de la Dynamique, à la brachistochrone, aux lignes géodésiques et au problème des isopérimètres; on trouve dans le deuxième les travaux de Clebsch et de Mayer sur la variation seconde; enfin le dernier est relatif à la variation des intégrales multiples et aux applications de cette théorie à la forme d'équilibre d'un liquide contenu dans un vase, aux surfaces d'aire minima et à la transformation des équations du potentiel.

On voit, par ces quelques indications, combien est substantiel ce troisième Volume d'un Ouvrage qui est devenu, si promptement et à bon droit, le code de tous ceux qui veulent étudier sérieusement l'Analyse et se mettre, sans effort, au courant des nouvelles acquisitions de cette partie de la Science.

Leçons sur la théorie générale des surfaces et sur les applications géométriques du Calcul infinitésimal; par M. *Gaston Darboux,* Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — Première Partie : 1 volume grand in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

L'Ouvrage dont M. Darboux publie aujourd'hui le premier Volume est le résumé des belles Leçons qu'il a faites à la Sorbonne de 1882 à 1886 et dont ce Livre ne peut manquer de faire revivre, dans l'esprit de ses anciens auditeurs, le charme pénétrant.

Après avoir étudié dans les premiers Chapitres le déplacement à un paramètre et montré comment l'intégration des systèmes linéaires possédant une intégrale du second degré peut être ramenée à l'intégration d'une équation de Riccati, l'auteur traite des déplacements à deux paramètres qui jouent un rôle fort important dans la théorie des surfaces. Puis, abandonnant le point de vue cinématique, l'auteur s'occupe des différents systèmes de coordonnées curvilignes; les systèmes conjugués et les systèmes orthogonaux, les lignes asymptotiques et les lignes de courbure forment la matière d'un second Livre rempli d'idées neuves et de résultats intéressants; nous citerons en particulier les Chapitres relatifs aux coordonnées pentasphériques et aux lignes de courbure en coordonnées tangentielles.

Mais la partie la plus remarquable du Volume et qui en forme à peu près la moitié est, sans contredit, celle qui concerne les *surfaces minima*. On ne saurait trouver rien de plus clair, de plus élégant, de plus complet; les recherches si nombreuses sur ce sujet sont résumées et reliées entre elles avec un art exquis. Le point de départ se trouve, comme on sait, dans le célèbre Mémoire de 1760 où Lagrange donne les principes du Calcul des variations; mais c'est Meunier qui, dans son Mémoire trop peu connu sur la courbure des surfaces, a commencé l'étude de l'équation aux dérivées partielles de Lagrange et a fait connaître deux surfaces minima qui sont aujourd'hui encore au nombre des plus intéressantes; les travaux les plus remarquables sont ensuite ceux de Monge, Legendre, Scherk, Björling, O. Bonnet, Weierstrass, Beltrami, Lie, Schwarz, etc. Dans l'impossibilité de tout citer, nous signalerons spécialement le Chapitre XII.

consacré au problème de Plateau; il s'agit de la question posée par Lagrange :

Déterminer la surface minima, continue ou assujettie à des discontinuités de nature connue, passant par un contour fermé.

Plateau a résolu le problème expérimentalement en plongeant le contour donné, réalisé physiquement, dans un liquide glycérique. Mais on ne connaît encore aucune méthode analytique générale pour résoudre la question. La solution complète n'existe que pour certaines formes simples du contour; les principaux résultats obtenus sur ce sujet sont dus à Riemann, Weierstrass et Schwarz; ils sont exposés ici avec cette lucidité parfaite d'un esprit qui éclaircit tout ce qu'il touche. E. R.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE EN 1884 POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PAR M. N. GOFFART.

On donne une conique $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$. *On joint un point* M *de cette conique aux foyers* F *et* F'.

1° *On demande d'exprimer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle* FMF' *au moyen des coordonnées de* M.

2° *Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que, si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondant à deux points* M *et* M' *de la conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le point milieu de la corde* MM';

3° *Pour chaque position du point* M, *le rayon vecteur* FM *touche le cercle correspondant en un point* P; *on déterminera en coordonnées polaires l'équation du*

lieu décrit par le point P. *On prendra le foyer* F *pour origine des rayons et* OX *pour origine des angles.*

Nota. — Dans toutes ces questions, il est nécessaire de distinguer les cas où la conique est une ellipse et celui où elle est une hyperbole.

1° En désignant par F et F' les deux foyers, F' étant celui qui est sur la partie positive de l'axe des x, on sait qu'on a

$$FM = a + \frac{cx}{a}, \qquad F'M = \pm\left(a - \frac{cx}{a}\right),$$

le signe + appartenant à l'ellipse, le signe — à l'hyperbole (branche F'). Par suite, si p désigne le demi-périmètre du triangle FMF', on a

$$\text{Dans l'ellipse : } \quad p = a + c.$$

$$\text{Dans l'hyperbole : } p = \frac{cx}{a} + c,$$

Désignons maintenant par C le centre du cercle inscrit, par C_M, C_F, $C_{F'}$ les centres des cercles exinscrits; les coordonnées de ces centres seront désignées par X, Y munis des indices correspondants.

Ces quatre centres se classent ainsi :

C et C_M sont sur la normale dans l'ellipse, et sur la tangente dans l'hyperbole; C_F et $C_{F'}$ sont au contraire sur la tangente dans l'ellipse et sur la normale dans l'hyperbole.

On a ensuite

$$c + X = p - MF', \qquad c + X_M = p - MF',$$
$$c + X_F = p, \qquad c - X_{F'} = p,$$
$$cy = pY = -(p - FF')Y_M = (p - MF')Y_F = (p - MF)Y_{F'};$$

substituant dans ces relations les valeurs de p, FF', MF,

MF′, il vient, dans l'ellipse,

$$X = \frac{cx}{a}, \qquad Y = \frac{cy}{a+c},$$

$$X_M = -\frac{cx}{a}, \qquad Y_M = -\frac{cy}{a-c},$$

$$X_F = a, \qquad Y_F = \frac{ay}{a+x},$$

$$X_{F'} = -a, \qquad Y_{F'} = \frac{ay}{a-x},$$

et, pour l'hyperbole,

$$X = a, \qquad Y = \frac{ay}{a+x},$$

$$X_M = -a, \qquad Y_M = -\frac{ay}{x-a},$$

$$X_F = \frac{cx}{a}, \qquad Y_{M'} = \frac{cy}{c+a},$$

$$X_{F'} = -\frac{cx}{a}, \qquad Y_{F'} = \frac{cy}{c-a},$$

Les expressions X et Y répondent à la première partie de l'énoncé. Mais on voit que X_M et Y_M jouent un rôle à peu près analogue. Enfin les cercles C et C_M dans l'ellipse sont représentés par les cercles C_F et $C_{F'}$ dans l'hyperbole. Les lieux des centres C et C_M dans l'ellipse (ou de C_F et $C_{F'}$ dans l'hyperbole) sont respectivement

$$\frac{X^2}{c^2} + \frac{Y^2}{c^2}\,\frac{a+c}{a-c} = 1, \qquad \frac{X^2}{c^2} + \frac{Y^2}{c^2}\,\frac{a-c}{a+c} = 1,$$

qui sont des ellipses relativement à l'ellipse, ou des hyperboles relativement à l'hyperbole.

Les lieux de C_F et $C_{F'}$ dans l'ellipse (ou de C et C_M dans l'hyperbole) sont les tangentes aux sommets A et A′ des coniques.

2° Si, par rapport à deux points M et M′, on considère dans l'ellipse les cercles C et C_M, ou dans l'hyperbole les

cercles C_F et $C_{F'}$, ils donnent lieu à la deuxième partie de l'énoncé. L'équation concernant le cercle C est, par exemple,

$$\left(\eta - \frac{c}{a+c}y\right)^2 + \left(\xi - \frac{c}{a}x\right)^2 = \frac{c^2 y^2}{(a+c)^2}.$$

En en retranchant une équation semblable pour le point $M'(x', y')$, on aura l'équation de l'axe radical

$$\left(\eta - \frac{c}{a+c}\,\frac{y+y'}{2}\right)\frac{c}{a+c}(y-y')$$
$$+\left(\xi - \frac{c}{a}\,\frac{x+x'}{2}\right)\frac{c}{a}(x-x') = \left(\frac{c}{a+c}\right)^2\frac{y'^2-y^2}{2}.$$

D'après l'équation de l'ellipse $\frac{x^2-x'^2}{a^2} = \frac{y'^2-y^2}{a^2-c^2}$, en tenant compte de cette relation, et faisant dans l'équation de l'axe radical

$$\eta = \frac{y+y'}{2}, \qquad \xi = \frac{x+x'}{2},$$

elle devient

$$\frac{y^2-y'^2}{2}\left(\frac{c}{a+c} - \frac{c}{a+c}\right) = 0.$$

Elle est donc satisfaite par les coordonnées du milieu de la corde MM'.

Ces propriétés n'ont pas lieu pour les autres cercles.

3° D'après ce qu'on a dit, on a

$$\text{FP} = c + \text{X} = c + \frac{cx}{a} \text{ dans l'ellipse,}$$
$$= a + c \text{ dans l'hyperbole;}$$

donc, dans ce dernier cas, le lieu de P est le cercle de centre F et de rayon $a+c$. Pour l'ellipse

$$\rho = c + \frac{cx}{a}; \qquad c + x = \text{MF}\cos\omega = \left(a + \frac{cx}{a}\right)\cos\omega;$$

éliminant x, il reste, pour l'équation du lieu de P,

$$\rho = \frac{c(a - c)(1 + \cos\varphi)}{a - c\cos\varphi};$$

si l'on remarque que

$$\text{FM} - \text{FP} = \left(a + \frac{cx}{a}\right) - \left(c + \frac{cx}{a}\right) = a - c,$$

on voit que cette courbe est une *conchoïde* de l'ellipse par rapport au foyer F : elle est fermée.

En prenant le cercle c_{M}, on obtiendrait un cercle dans l'ellipse et une conchoïde (à branches infinies) de l'hyperbole, dans l'hyperbole.

Enfin, si l'on prend les autres cercles, on aura des relations analogues aux précédentes; par exemple, des cercles de rayon $a + c$ et $a - c$ pour les lieux des points de contact de FM avec C_{F} et $C_{F'}$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1564. Étudier le complexe des droites D dont les distances à deux droites données L et L′ ont un rapport constant K. Examiner en particulier le cas où les droites L et L′ se coupent à angle droit et celui où ces droites sont parallèles. (Schoute.)

1565. Les points de Brocard et les points de Steiner sont sur une hyperbole circonscrite au triangle fondamental. (Cesaro.)

1566. D étant la perpendiculaire élevée sur l'axe focal d'une conique par l'un des points de cet axe d'où la conique est vue sous un angle droit, et P désignant le

pôle de la droite D par rapport à la conique, si un cercle, ayant son centre sur cette conique et tangent à la droite D, coupe l'axe focal aux points M_1 et M_2, le rapport de PM_1 à PM_2 est constant.

Que devient le théorème dans le cas de l'hyperbole équilatère? (Maurice d'Ocagne.)

1567. Soient deux coniques A et B ayant respectivement pour foyers réels a_1 et a_2, b_1 et b_2; soit C une conique quelconque inscrite dans le quadrilatère circonscrit à A et B; les deux couples de droites joignant un foyer de C aux points a_1 et a_2, b_1 et b_2 ont les mêmes bissectrices.

Le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à deux coniques reste le même si ces deux coniques varient, leurs foyers respectifs restant fixes.

Soient deux systèmes de coniques respectivement homofocales; les points d'intersection des tangentes communes à une conique quelconque du premier système et à une conique quelconque du second restent sur une courbe qui coïncide avec le lieu précédent.

(G. Humbert.)

1568. Dans une cissoïde de Dioclès, l'aire comprise entre la courbe et son asymptote est égale à trois fois l'aire du cercle générateur. (Barisien.)

TABLE DES MATIÈRES.

Août 1887.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

(Troisième Série.) — Septembre 1887.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE.

SEPTEMBRE 1887.

S'adresser, pour la rédaction,

à M. BRISSE, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine),
ou à M. ROUCHÉ, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

12406 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55

SUR UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE ET SUR LA QUESTION POSÉE AU CONCOURS DE 1881 POUR L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES;

Par M. GENTY.

On donne un ellipsoïde, et l'on considère les droites D *telles que, si par chacune d'elles on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, les normales aux points de contact* M *et* M′ *soient situées dans un même plan.*

1° *Démontrer que la droite* D *et la corde* MM′ *sont rectangulaires.*

2° *Trouver le lieu des droites* D *qui passent par un point donné* A.

3° *Ce lieu est un cône du second degré : trouver le lieu des positions du point* A *pour lesquelles ce cône est de révolution.*

4° *Trouver l'enveloppe* C *des droites* D *qui sont contenues dans un plan donné* P *et la surface* S *engendrée par la courbe* C, *quand le plan* P *se déplace parallèlement à un plan donné* Q.

5° *Trouver pour quelles directions du plan* Q *la surface* S *est de révolution.*

I.

1. Si les normales aux points M et M′ de l'ellipsoïde se rencontrent, il est évident que leur plan est normal à la droite D, intersection des plans tangents en M et M′; la droite D et sa polaire MM′ par rapport à l'ellipsoïde sont donc rectangulaires.

Réciproquement, si une corde MM′ de l'ellipsoïde et

sa polaire D sont rectangulaires, les normales aux points M, M′ sont dans un même plan; c'est le plan mené par la droite MM′ perpendiculairement à la droite D.

Les droites D sont donc les droites de l'espace qui sont normales à leurs polaires par rapport à l'ellipsoïde, et leur ensemble constitue le complexe tétraédral particulier à l'étude duquel le Dr Th. Reye a consacré la vingt et unième leçon de sa *Géométrie de position.*

Avant de donner une théorie analytique de ce complexe, nous devons rappeler quelques notions fondamentales sur les *coordonnées d'une droite.*

2. Les équations d'une droite en coordonnées cartésiennes rectangulaires étant ramenées à la forme

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n},$$

on peut prendre pour coordonnées de la droite les six quantités

$$l, \; m, \; n,$$
$$\lambda = ny_1 - mz_1, \qquad \mu = lz_1 - nx_1, \qquad \nu = mx_1 - ly_1,$$

entre lesquelles on a la relation identique

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0;$$

l, m, n sont proportionnels aux cosinus des angles que fait la droite avec les axes; λ, μ, ν sont de même proportionnels aux angles que fait avec les axes le plan mené par la droite et l'origine, et, si d est la distance de l'origine à la droite, on a

$$d^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Pour $l = m = n = 0$, on a une droite située tout entière à l'infini; λ, μ et ν déterminent la direction de

la normale aux plans parallèles qui contiennent cette droite.

Pour $\lambda = \mu = \nu = 0$, on a la droite passant par l'origine et faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à l, m et n respectivement.

Pour $\mu = \nu = 0$, λ étant différent de o (ce qui entraîne $l = 0$), on a une droite située dans le plan des zx.

Pour $m = n = 0$, l étant différent de zéro (ce qui entraîne $\lambda = 0$), on a une droite parallèle à l'axe des x.

Cela posé, voici quelques formules fort utiles et dont la démonstration n'offre aucune difficulté.

3. Les coordonnées de la droite

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2},$$

qui joint les deux points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), sont

$$l = x_1 - x_2, \qquad m = y_1 - y_2, \qquad n = z_1 - z_2,$$
$$\lambda = y_2 z_1 - y_1 z_2, \qquad \mu = z_2 x_1 - z_1 x_2, \qquad \nu = x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

4. Les coordonnées du point d'intersection de la droite $(l, m, n; \lambda, \mu, \nu)$ et du plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

ont pour expression

$$x = \frac{\beta\nu - \gamma\mu - \delta l}{\alpha l + \beta\mu + \gamma n},$$
$$y = \frac{\gamma\lambda - \alpha\nu - \delta m}{\alpha l + \beta m + \gamma n},$$
$$z = \frac{\alpha\mu - \beta\lambda - \delta n}{\alpha l + \beta m + \gamma n}.$$

La droite est parallèle au plan si l'on a

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0;$$

elle est située tout entière dans le plan, si l'on a en même temps

$$\begin{aligned} \beta\nu - \gamma\mu - \delta l &= 0,\\ \gamma\lambda - \alpha\nu - \delta m &= 0,\\ \alpha\mu - \beta\lambda - \delta n &= 0. \end{aligned}$$

Les quatre équations qui précèdent ne représentent d'ailleurs que deux conditions distinctes; on obtient en effet la première en additionnant les trois autres multipliées par α, β, γ respectivement, et l'on obtient la quatrième en additionnant la deuxième et la troisième après les avoir multipliées respectivement par λ et μ.

5. Le résultat qui précède conduit immédiatement *aux équations ordinaires d'une droite donnée par ses coordonnées* l, m, n; λ, μ, ν.

Ces équations sont les suivantes :

$$\frac{x - \dfrac{\beta\nu - \gamma\mu - \delta l}{\alpha l + \beta m + \gamma n}}{l} = \frac{y - \dfrac{\gamma\lambda - \alpha\nu - \delta m}{\alpha l + \beta m + \gamma n}}{m} = \frac{z - \dfrac{\alpha\mu - \beta\lambda - \delta n}{\alpha l + \beta m + \gamma n}}{n},$$

α, β, γ, δ ayant des valeurs absolument quelconques, pourvu qu'on n'ait pas en même temps $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

6. Les coordonnées de la droite, intersection des deux plans

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta &= 0,\\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' &= 0, \end{aligned}$$

ont pour expression

$$\begin{aligned} l &= \beta\gamma' - \gamma\beta', & m &= \gamma\alpha' - \alpha\gamma', & n &= \alpha\beta' - \beta\alpha',\\ \lambda &= \delta\alpha' - \alpha\delta', & \mu &= \delta\beta' - \beta\delta', & \nu &= \delta\gamma' - \gamma\delta'. \end{aligned}$$

7. La distance d d'un point (x_2, y_2, z_2) à une droite

$(l, m, n; \lambda, \mu, \nu)$ est donnée par la formule

$$d^2 = \frac{(\lambda - ny_2 + mz_2)^2 + (\mu - lz_2 + nx_2)^2 + (\nu - mx_2 + ly_2)^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Les conditions pour que le point appartienne à la droite sont donc

$$\lambda = ny_2 - mz_2, \qquad \mu = lz_2 - nx_2, \qquad \nu = mx_2 - ly_2,$$

qui se réduisent à deux distinctes et qui résulteraient aussi des formules du n° 3.

8. Les coordonnées de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite $(l, m, n; \lambda, \mu, \nu)$ sont

$$\mu n - m\nu, \quad \nu l - n\lambda, \quad \lambda m - l\mu, \quad 0, \quad 0, \quad 0.$$

Le plan mené par la droite $(l_1, m_1, n_1; \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, parallèlement à la droite $(l_2, m_2, n_2; \lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, a pour équation

$$(1) \qquad (x, m_1, n_2) = P_{21},$$

en posant

$$(x, m_1, n_2) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix},$$

et

$$P_{rs} = l_r\lambda_s + m_r\mu_s + n_r\nu_s.$$

La plus courte distance des deux droites est la distance au plan (1) du point (x_2, y_2, z_2) de la seconde : on a donc

$$d = \frac{l_2\lambda_1 + m_2\mu_1 + n_2\nu_1 - (x_2, m_1, n_2)}{\sqrt{(m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2 + (l_1m_2 - l_2m_1)^2}}.$$

En vertu des formules du n° 6, le numérateur peut d'ailleurs s'écrire

$$P_{21} + P_{12}.$$

La condition qui exprime que les deux droites se rencontrent est donc

$$P_{21} + P_{12} = 0,$$

et, si cette condition est vérifiée, on reconnaît sans peine que le plan des deux droites a pour équation

$$(x, m_1, n_2) = P_{21} = - P_{12};$$

que leur point de rencontre a pour coordonnées

$$\frac{\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1}{P_{21}}, \quad \frac{\nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1}{P_{21}}, \quad \frac{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}{P_{21}};$$

enfin, que les coordonnées d'une droite quelconque passant par leur point d'intersection et situées dans leur plan sont

$$l + kl_1, \quad m + km_1, \quad n + kn_1, \quad \lambda + k\lambda_1, \quad \mu + k\mu_1, \quad \nu + k\nu_1.$$

9. Les conditions pour que trois droites

$$(l_1, m_1, n_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1), \quad (l_2, m_2, \ldots), \quad (l_3, m_3, \ldots)$$

se rencontrent deux à deux sont, d'après ce qui précède,

$$(1) \qquad \begin{cases} P_{23} + P_{32} = 0, \\ P_{31} + P_{13} = 0, \\ P_{12} + P_{21} = 0. \end{cases}$$

Or le produit $(l_1, m_1, n_1) \times (\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ est, d'après la règle de multiplication des déterminants, égal à

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & 0 & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & 0 \end{vmatrix};$$

il est donc nul en vertu des équations (1). Donc ces équations entraînent l'une ou l'autre des conditions

$$(2) \qquad (l_1, m_2, n_3) = 0,$$

$$(3) \qquad (\lambda_1, \mu_2, \nu_3) = 0.$$

Si l'équation (2) est satisfaite sans que l'équation (3) le soit, les trois droites sont dans un même plan normal à la directrice qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$P_{23}\lambda_1 + P_{31}\lambda_2 + P_{12}\lambda_3;$$
$$P_{23}\mu_1 + P_{31}\mu_2 + P_{12}\mu_3;$$
$$P_{23}\nu_1 + P_{31}\nu_2 + P_{12}\nu_3.$$

Si, au contraire, la condition (3) est satisfaite, sans que la condition (2) le soit, les trois droites forment un trièdre dont le sommet a pour coordonnées

$$\frac{P_{32}l_1 + P_{13}l_2 + P_{21}l_3}{(l_1, m_2, n_3)};$$
$$\frac{P_{32}m_1 + P_{13}m_2 + P_{21}m_3}{(l_1, m_2, n_3)};$$
$$\frac{P_{32}n_1 + P_{13}n_2 + P_{21}n_3}{(l_1, m_2, n_3)}.$$

Si enfin les conditions (2) et (3) sont satisfaites en même temps, les trois droites sont situées dans un même plan et passent par un même point, ce plan et ce point étant déterminés comme au n° 8.

10. Nous signalerons enfin, sans les démontrer, deux formules élégantes :

Trois droites $(l_1, \ldots)$, $(l_2, \ldots)$, $(l_3, \ldots)$ qui ne sont pas situées dans un même plan déterminent un parallélépipède qu'on obtient en menant par chacune de ces droites des plans parallèles aux deux autres.

Le volume de ce parallélépipède a pour expression

$$V = \frac{1}{2}\,\frac{(P_{23} + P_{32})(P_{31} + P_{13})(P_{12} + P_{21})}{(l_1, m_2, n_3)^2}.$$

Le centre de parallélépipède, c'est-à-dire le centre de l'hyperboloïde déterminé par ces trois droites a pour

coordonnées

$$\frac{(P_{32}-P_{23})l_1+(P_{13}-P_{31})l_2+(P_{21}-P_{12})l_3}{2(l_1, m_2, n_3)}, \quad \ldots\ldots$$

II.

11. Une équation homogène de degré n par rapport aux coordonnées de la droite

$$(1) \qquad F(l, m, n; \lambda, \mu, \nu) = 0$$

représente un *complexe* d'ordre n.

On obtient l'équation du cône du complexe, c'est-à-dire le lieu des droites du complexe qui passent par un point donné (x_1, y_1, z_1), en remplaçant dans cette équation $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ respectivement par

$$\begin{gathered} x-x_1, \quad y-y_1, \quad z-z_1, \\ y_1 z - z_1 y, \quad z_1 x - x_1 z, \quad x_1 y - y_1 x, \end{gathered}$$

ce qui donne

$$F[x-x_1, y-y_1, z-z_1, (y_1, z), (z_1, x), (x_1, y)] = 0,$$

équation de degré n.

Si l'on porte l'origine au sommet du cône, cette équation devient simplement

$$F[x, y, z, (y, z), (z_1, x), (x_1, y)] = 0.$$

Soit (x, y, z) un point quelconque d'une droite du complexe faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à l_1, m_1 et n_1; l'équation (1) pourra se mettre sous la forme

$$F(l_1, m_1, n_1, n_1 y - m_1 z, l_1 z - n_1 x, m_1 x - l_1 y) = 0.$$

12. Cherchons *la courbe du complexe* située dans le plan

$$(1) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 1.$$

Soient l, m, n, λ, μ, ν les coordonnées d'une droite du complexe située dans ce plan ; nous aurons

$$l = \beta\nu - \gamma\mu,$$
$$m = \gamma\lambda - \alpha\nu,$$
$$n = \alpha\mu - \beta\lambda;$$

en remplaçant l, m et n par ces valeurs dans l'équation du complexe, nous aurons

$$(2) \qquad F(\beta\nu - \gamma\mu, \gamma\lambda - \alpha\nu, \alpha\mu - \beta\lambda, \lambda, \mu, \nu) = 0,$$

et, si l'on regarde λ, μ et ν comme des coordonnées cartésiennes, cette équation représente le cône réciproque de celui qui a son sommet à l'origine et pour base la courbe du complexe située dans le plan (1).

L'équation (2) étant d'ordre n, la courbe en question est de la $n^{\text{ième}}$ classe.

13. Cherchons enfin la courbe du complexe située dans le plan

$$(1) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

qui passe par l'origine.

Soit (x_1, y_1, z_1) le pôle d'une droite du complexe située dans ce plan par rapport au cercle de rayon égal à l'unité et ayant son centre à l'origine. La droite elle-même aura pour équations

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 1,$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

et, par suite, pour coordonnées (6),

$$l = \beta z_1 - \gamma y_1, \qquad m = \gamma x_1 - \alpha z_1, \qquad n = \alpha y_1 - \beta x_1.$$
$$\lambda = \alpha, \qquad \mu = \beta, \qquad \nu = \gamma.$$

En portant ces valeurs dans l'équation du complexe et supprimant les indices, il vient

$$F(\beta z - \gamma y, \gamma x - \alpha z, \alpha y - \beta x, \alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

pour l'équation de la polaire réciproque de la courbe cherchée.

III.

14. Revenons maintenant à la question du concours d'agrégation.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde donné,

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

celles de l'une des droites D.

La polaire de cette droite par rapport à l'ellipsoïde est l'intersection du plan polaire du point (x_1, y_1, z_1) et du plan diamétral conjugué de la droite D; elle a donc pour équations

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1,$$

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = 0;$$

elle fait donc avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$a^2(ny_1 - mz_1), \quad b^2(lz_1 - nx_1), \quad c^2(mx_1 - ly_1),$$

ou à λ, μ et ν, et la condition du problème donne immé-

diatement

$$(1) \qquad a^2 l\lambda + b^2 m\mu + c^2 n\nu = 0,$$

équation d'un complexe du second ordre.

Cette équation ne change pas si l'on remplace a^2, b^2 et c^2 par $\sigma a^2 + \rho$, $\sigma b^2 + \rho$ et $\sigma c^2 + \rho$ respectivement, σ et ρ étant deux nombres quelconques; nous dirons donc que le complexe appartient à toutes les surfaces du second ordre ayant pour équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\sigma a^2 + \rho} + \frac{y^2}{\sigma b^2 + \rho} + \frac{z^2}{\sigma c^2 + \rho} = 1.$$

Cette équation représente l'ensemble de toutes les surfaces du second ordre homothétiques et coaxiales à l'ellipsoïde donné ou, ce qui est la même chose, l'ensemble des surfaces homofocales des ellipsoïdes homothétiques et coaxiaux à l'ellipsoïde donné.

L'équation (1) est satisfaite pour $m = n = 0$ (ce qui entraîne $l = 0$ ou $\lambda = 0$) et pour $\mu = \nu = 0$ (ce qui entraîne $\lambda = 0$ ou $l = 0$); donc toutes les droites passant par l'origine, toutes les parallèles aux axes principaux de l'ellipsoïde, toutes les droites situées dans le plan de l'infini et enfin toutes celles situées dans l'un des plans principaux de l'ellipsoïde font partie du complexe.

Le complexe contient aussi toutes les normales aux surfaces du second ordre représentées par l'équation (2).

En effet, la normale au point (x_1, y_1, z_1) de l'une de ces surfaces a pour équations

$$\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{\sigma a^2 + \rho}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{\sigma b^2 + \rho}} = \frac{z - z_1}{\frac{z_1}{\sigma c^2 + \rho}},$$

et ses coordonnées, qui ont pour expression

$$l = \frac{x_1}{\sigma a^2 + \rho}, \qquad m = \frac{y_1}{\sigma b^2 + \rho}, \qquad n = \frac{z_1}{\sigma c^2 + \rho},$$

$$\lambda = \frac{\sigma y_1 z_1 (b^2 - c^2)}{(\sigma b^2 + \rho)(\sigma c^2 + \rho)},$$

$$\mu = \frac{\sigma z_1 x_1 (c^2 - a^2)}{(\sigma c^2 + \rho)(\sigma a^2 + \rho)},$$

$$\nu = \frac{\sigma x_1 y_1 (a^2 - b^2)}{(\sigma a^2 + \rho)(\sigma b^2 + \rho)},$$

satisfont identiquement à l'équation (1).

Le complexe comprend par suite les axes de toutes les quadriques représentées par l'équation (2), et aussi les axes principaux de tous les cônes circonscrits à ces surfaces.

15. Si de l'équation du complexe

$$(1) \qquad a^2 l\lambda + b^2 m\mu + c^2 n\nu = 0$$

nous retranchons l'identité

$$a^2(l\lambda + m\mu + n\nu) = 0,$$

il vient

$$(b^2 - a^2) m\mu + (c^2 - a^2) n\nu = 0,$$

ou bien, x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées d'un point quelconque d'une droite du complexe,

$$(b^2 - a^2) m(l z_1 - m x_1) = (a^2 - c^2) n(m x_1 - l y_1),$$

ou enfin

$$\frac{\dfrac{z_1}{n} - \dfrac{x_1}{l}}{\dfrac{x_1}{l} - \dfrac{y_1}{m}} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - a^2}.$$

Mais, si A, B et C sont les points où la droite considérée perce les plans coordonnés, le premier membre

de la relation précédente équivaut à $\frac{MC - MA}{MA - MB}$, c'est-à-dire à $\frac{CA}{AB}$.

L'équation (1) exprime donc cette propriété fondamentale du complexe, à savoir que toutes les droites qui en font partie sont coupées dans le même rapport par les plans principaux des surfaces du second ordre auxquelles il appartient.

16. Le cône du complexe, qui a son sommet au point x, a pour équation (n° 11)

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & a^2(x - x_1)(yz_1 - zy_1) + b^2(y - y_1)(zx_1 - xz_1) \\ & \qquad + c^2(z - z_1)(xy_1 - x_1 y) = 0, \end{aligned} \right.$$

ou bien, en supposant les axes transportés parallèlement à eux-mêmes au point (x_1, y_1, z_1),

$$(2) \quad (b^2 - c^2)x_1 yz + (c^2 - a^2)y_1 zx + (a^2 - b^2)z_1 xy = 0.$$

Cette équation ne change pas quand on remplace x_1, y_1 et z_1 par kx_1, ky_1 et kz_1 respectivement. En d'autres termes, tous les cônes du complexe qui ont leurs sommets sur un diamètre de l'ellipsoïde ont une conique commune dans le plan à l'infini.

On obtient l'intersection du cône avec le plan des yz en faisant $x = 0$ dans l'équation (1), ce qui donne

$$- a^2(yz_1 - zy_1) + b^2(y - y_1)zx_1 - c^2(z - z_1)yx_1 = 0$$

ou bien

$$(b^2 - c^2)y^2 - (c^2 - a^2)y_1 z - (a^2 - b^2)z_1 y = 0,$$

équation indépendante de x_1. Donc tous les cônes du complexe qui ont leurs sommets sur une droite parallèle à un axe principal de l'ellipsoïde rencontrent le plan principal normal suivant une même hyperbole équilatère.

17. L'équation (2) du paragraphe précédent montre qu'un cône du complexe ne peut se réduire à un système de deux plans que si l'une ou l'autre des coordonnées x_1, y_1, z_1 est nulle, c'est-à-dire si le sommet du cône est situé dans l'un ou l'autre des plans principaux de l'ellipsoïde.

D'un autre côté, un cylindre quelconque du complexe ayant pour équation (n° 11)

$$(2)\quad a^2 l(ny - mz) + b^2 m(lz - nx) + c^2 n(mx - ly) = 0$$

se décompose lui-même en un système de deux plans, le plan à l'infini et celui qui est représenté par l'équation (2).

On voit ainsi que la *surface singulière* du complexe, considérée comme le lieu des sommets des cônes du complexe qui se réduisent à un système de deux plans, se compose de quatre plans, savoir les trois plans principaux de l'ellipsoïde et le plan à l'infini.

18. Le cône du complexe qui à son sommet au point (x_1, y_1, z_1), ayant pour équation

$$(b^2 - c^2) x_1 yz + (c^2 - a^2) y_1 zx + (a^2 - b^2) z_1 xy = 0,$$

est un cône de révolution pour

$$(b^2 - c^2)^2 x_1^2 = (c^2 - a^2)^2 y_1^2 = (a^2 - b^2)^2 z_1^2$$

ou, en supprimant les indices,

$$(b^2 - c^2) x = \pm (c^2 - a^2) y = \pm (a^2 - b^2) z,$$

équations de quatre droites passant par l'origine et symétriques deux à deux par rapport aux plans principaux de l'ellipsoïde.

19. Soit

$$(1)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

l'équation d'un plan quelconque. Le cône réciproque de celui qui a son sommet à l'origine et pour base la courbe du complexe située dans ce plan a pour équation (n° 12)

$$a^2x(\beta z - \gamma y) + b^2y(\gamma x - \alpha z) + c^2z(\alpha y - \beta x) = 0$$

ou bien

$$(2) \qquad (b^2 - c^2)\alpha yz + (c^2 - a^2)\beta zx + (a^2 - b^2)\alpha xy = 0.$$

Ce cône contient les axes et la normale au plan (1); donc la courbe du complexe est une parabole tangente aux intersections de son plan avec les plans principaux de l'ellipsoïde.

20. L'équation (2) du paragraphe précédent est indépendante de δ et, par suite, elle ne change pas quand le plan (1) se meut parallèlement à lui-même. Donc les courbes du complexe situées dans des plans parallèles sont sur un cône du second ordre dont le sommet est à l'origine.

Ce cône, qui est le réciproque du cône (2), a pour équation

$$\sqrt{(b^2 - c^2)\alpha x} + \sqrt{(c^2 - a^2)\beta y} + \sqrt{(a^2 - b^2)\gamma z} = 0,$$

et il est de révolution si l'on a

$$\alpha(b^2 - c^2) = \pm \beta(c^2 - a^2) \pm \gamma(a^2 - b^2),$$

c'est-à-dire lorsque les plans des courbes du complexe sont perpendiculaires à l'une ou l'autre des quatre droites trouvées ci-dessus (n° 18).

SUR LE CALCUL D'UNE FONCTION SYMÉTRIQUE;

PAR M. H. LAURENT.

Soient

$$\varphi(x) = 0$$

une équation algébrique de degré m et $\psi(x)$ une fonction entière de x de degré μ. Divisons $\psi(x)$ par $\varphi(x)$; soient q_1 le quotient, ψ_1 le reste. Divisons $x\psi_1$ par $\varphi(x)$; soient q_1 le quotient, ψ_2 le reste, etc. Divisons $x\psi_{m-1}$ par φ; soient q_m le quotient, ψ_m le reste. Soient enfin

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a_{11}x^{m-1} + a_{12}x^{m-2} + \ldots + a_{2m}, \\ \psi_2 &= a_{21}x^{m-1} + a_{22}x^{m-2} + \ldots + a_{2m}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_m &= a_{m1}x^{m-1} + a_{m2}x^{m-2} + \ldots + a_{mm}, \end{aligned}$$

$$R = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{mm}.$$

On aura

$$\begin{aligned} \psi(x) &= q_1\varphi + \psi_1, \\ x\psi_1(x) &= q_2\varphi + \psi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x\psi_{m-1}(x) &= q_m\varphi + \psi_m; \end{aligned}$$

on en conclut

$$x^{j-1}\psi(x) = \lambda\varphi + \psi_j(x),$$

λ désignant un polynôme entier, et par suite, en appelant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les racines de $\varphi(x) = 0$,

$$(1) \qquad \alpha_i^{j-1}\psi(\alpha_i) = \psi_j(\alpha_i);$$

si donc on pose

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \alpha_3^{m-1} & \ldots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix} = A,$$

A sera le produit des différences des racines de $\varphi = 0$ et l'on aura

$$(2)\quad \begin{vmatrix} \psi(\alpha_1) & \psi(\alpha_2) & \ldots & \psi(\alpha_m) \\ \alpha_1\psi(\alpha_1) & \alpha_2\psi(\alpha_2) & \ldots & \alpha_n\psi(\alpha_m) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_1^{m-1}\psi(\alpha_1) & \alpha_2^{m-1}\psi(\alpha_2) & \ldots & \alpha_m^{m-1}\psi(\alpha_m) \end{vmatrix} = A\,\psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_n).$$

Or on a

$$\psi_j(\alpha_i) = a_{j1}\alpha_i^{m-1} + a_{j2}\alpha_i^{m-2} + \ldots + a_{jn}:$$

donc, en vertu de (1),

$$\alpha_i^{j-1}\,\psi(\alpha_i) = a_{j1}\alpha_i^{m-1} + a_{j2}\alpha_i^{m-2} + \ldots + a_{jm};$$

donc, le déterminant qui figure dans le premier membre de (2) est le produit de R par A. La formule (2) donne alors

$$RA = A\,\psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\ldots,$$

ou enfin

$$(3)\qquad \psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_m) = R.$$

La fonction R est donc le premier membre de la résultante des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Il est d'ailleurs facile de reconnaître, dans les polynômes ψ_1, ψ_2, ..., ceux qui servent à Cauchy pour former sa résultante.

C'est, je crois, la première fois que l'identité (3) est démontrée directement. Le théorème de Bézout en découle.

Cette méthode peut être généralisée et étendue à un nombre quelconque d'équations à l'aide de la notion des polynômes réduits et des équivalences algébriques dont j'ai présenté la théorie dans les *Nouvelles Annales* l'année dernière.

Considérons les équations algébriques

$$(1)\qquad \varphi_1 = 0,\qquad \varphi_2 = 0,\qquad \ldots,\qquad \varphi_n = 0,$$

des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$ par rapport aux inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et soit ψ une fonction entière de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de degré μ. Appelons $1 = \omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{p-1}$ les $p = m_1 m_2 \ldots m_n$ arguments réduits, c'est-à-dire les quantités de la forme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots$ qui ne contiennent pas de facteur $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}$. Soient $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{p-1}$ les polynômes réduits équivalents à $\omega^0\psi, \omega^1\psi, \ldots, \omega^{p-1}\psi$; enfin désignons en général par $(\mathrm{F})_i$ ce que devient un polynôme F quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les éléments de la $i^{\text{ième}}$ solution des équations (1) que nous supposons distinctes, finies et au nombre de p. Posons

$$\Theta = \begin{vmatrix} (\psi_0)_1 & (\psi_1)_1 & \ldots & (\psi_{p-1})_1 \\ (\psi_0)_2 & (\psi_1)_2 & \ldots & (\psi_{p-1})_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\psi_0)_p & (\psi_1)_p & \ldots & (\psi_{p-1})_p \end{vmatrix}.$$

Si l'on pose

$$\Omega = \begin{vmatrix} (\omega^0)_1 & (\omega^1)_1 & \ldots & (\omega^{p-1})_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\omega^0)_p & (\omega^1)_p & \ldots & (\omega^{p-1})_p \end{vmatrix},$$

et si, faisant, en général,

$$\psi_j = a_{j0}\omega^0 + a_{j1}\omega^1 + \ldots + a_{jp-1}\omega^{p-1},$$

on désigne par R le déterminant $\Sigma a_{00} a_{11} \ldots a_{p-1p-1}$, on observe que l'on a

$$(\psi_j)_i = (\omega^j \psi)_i,$$

on trouvera

$$\Theta = \Omega \mathrm{R}; \tag{2}$$

mais le déterminant Θ peut aussi se mettre sous la forme

$$\Theta = \begin{vmatrix} (\psi)_1 (\omega^0)_1 & (\psi)_1 (\omega^1)_1 \\ (\psi)_2 (\omega^0)_2 & (\psi)_2 (\omega^1)_2 \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

ou

$$\Theta = (\psi)_1 (\psi)_2 \ldots (\psi)_p. \tag{3}$$

De (2) et (3) on conclut

$$R = (\psi)_1 (\psi)_2 \ldots (\psi)_n,$$

et R = o est la résultante du système

$$\psi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0$$

L'évaluation du degré de R ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

SUR UNE QUESTION POSÉE AUX EXAMENS ORAUX D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. GEORGES MAUPIN,
Élève en Mathématiques au lycée de Rennes.

On donne un paraboloïde hyperbolique équilatère et une ellipse dans un de ses plans directeurs. A cette ellipse on mène une tangente, et l'on considère une génératrice du paraboloïde qui lui soit perpendiculaire. Trouver le lieu de la perpendiculaire commune à la tangente et à la génératrice.

Je vais démontrer que ce lieu se compose :

1° D'un cylindre droit, ayant pour base une podaire de l'ellipse;

2° De deux paraboloïdes hyperboliques, égaux entre eux et égaux au paraboloïde donné;

3° Du plan de l'ellipse.

Soient ox, oy, oz trois axes rectangulaires; les plans yox et zox sont les plans directeurs du paraboloïde et o est le sommet. Il y a lieu de considérer successivement les génératrices qui sont parallèles au plan xoy et celles

qui sont parallèles au plan *zox*; les premières rencontrent *oz* et les secondes s'appuient sur *oy*.

1° Si G est une génératrice parallèle à *xoy*, il y a toujours deux tangentes à l'ellipse qui sont perpendiculaires à G; soit T l'une quelconque d'entre elles. La perpendiculaire commune à G et à T est parallèle à *oz*; soit d'ailleurs *g* la projection de G sur *xoy*; le point *m* où elle coupe T est la trace de la perpendiculaire commune. Or le lieu du point *m* est la podaire de *o* par rapport à l'ellipse, c'est-à-dire une quartique. Donc le lieu de la perpendiculaire commune est le cylindre du quatrième ordre, admettant cette quartique comme directrice et ayant ses génératrices parallèles à *oz*.

2° Considérons maintenant une génératrice Γ parallèle à *zox*; supposons qu'il lui corresponde une tangente Θ de l'ellipse. L'angle formé par Γ et Θ a un côté dans le plan *xoy* : donc il se projette sur ce plan suivant un angle droit; et comme la projection γ à Γ est parallèle à *ox* . Θ sera perpendiculaire à *ox*.

Ainsi la tangente Θ est menée à l'ellipse parallèlement à *oy*. Il y a deux tangentes parallèles à *oy*, je les désignerai par Θ et Θ_1.

Cherchons le lieu correspondant à Θ; par le point où se coupent γ et Θ menons la perpendiculaire à Γ : cette droite sera la perpendiculaire commune P. Or supposons que le paraboloïde donné glisse parallèlement à lui-même, le long de *ox*, de manière que *oy* vienne s'appliquer sur Θ, puis qu'on lui imprime une rotation de 90° autour de Θ. On voit qu'après ce double mouvement la génératrice Γ sera confondue avec P, qu'à toute génératrice du paraboloïde correspondra ainsi une génératrice du lieu, ou qu'enfin le paraboloïde sera confondu avec le lieu de P.

Le lieu de P est donc un paraboloïde égal au premier:

il a pour plans directeurs xoz et zoy, et ox et Θ sont les génératrices qui passent par le sommet. De même le lieu correspondant à Θ est un troisième paraboloïde, qui se déduit du second en transportant celui-ci parallèlement à lui-même, le long de ox, jusqu'à ce que Θ soit venu en Θ_1.

3° Nous avons dit (2°) que les génératrices Γ se projettent parallèlement à ox; il y a exception pour la génératrice oz. Cette génératrice est projetée suivant le point o, elle est perpendiculaire à toutes les tangentes à c, et le lieu des perpendiculaires communes qui lui correspondent est le plan xoy.

SUR UNE APPLICATION DE LA MÉTHODE DE STURM;

PAR M. CH. BIEHLER.

La fonction tang$x$ développée en fraction continue donne, comme l'on sait, le développement suivant

$$\operatorname{tang} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}}$$

Les réduites de cette fraction continue sont des quotients de polynômes entiers en x. Ces polynômes ont tous leurs zéros réels, et la démonstration de cette propriété par la méthode de Sturm donne lieu à une remarque qui offre quelque intérêt.

En formant les réduites successives de la fraction con-

tinue, on obtient

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{x}{1},$$
$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{3x}{1.3 - x^2},$$
$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{1.3.5x - x^3}{1.3.5 - 6x^2},$$
. . . .

D'une manière générale, les polynômes P et les polynômes Q sont liés par la loi de récurrence

$$P_n = (2n - 1)P_{n-1} - x^2 P_{n-2},$$
$$Q_n = (2n - 1)Q_{n-1} - x^2 Q_{n-2}.$$

Ces relations s'appliquent même pour $n = 2$, si l'on fait les conventions

$$P_0 = 0, \qquad Q_0 = 1.$$

Elles permettent de calculer aisément ces polynômes; on a ainsi

$$P_1 = x,$$
$$P_2 = 1.3x,$$
$$P_3 = 1.3.5x - x^3,$$
$$P_4 = 1.3.5.7x - 10x^3,$$
$$P_5 = 1.3.5.7.9x - 105x^3 + x^5,$$
$$P_6 = 1.3.5.7.9.11x - 1260x^3 + 21x^5,$$
. . . . ;

$$Q_1 = 1,$$
$$Q_2 = 1.3 - x^2,$$
$$Q_3 = 1.3.5 - 6x^2,$$
$$Q_4 = 1.3.5.7 - 45x^2 + x^4,$$
$$Q_5 = 1.3.5.7.9 - 420x^2 + 15x^4,$$
$$Q_6 = 1.3.5.7.9.11 - 4725x^2 + 210x^4 - x^6,$$
. . . .

On voit que P_{2n-1} et P_{2n} sont chacun de degré $2n-1$,

et que les coefficients de la plus haute puissance de x changent de signe de deux en deux; ces coefficients sont du signe de $(-1)^{n-1}$.

La relation

$$P_n = (2n-1)P_{n-1} - x^2 P_{n-2},$$

appliquée aux polynômes P_{2n}, P_{2n-1}, P_{2n-2}, ..., va nous permettre de démontrer la réalité des racines de l'équation $P_{2n} = 0$ ou de $P_{2n-1} = 0$. On a, en effet,

$$P_{2n} = (4n-1)P_{2n-1} - x^2 P_{2n-2},$$
$$P_{2n-1} = (4n-3)P_{2n-2} - x^2 P_{2n-3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$P_2 = 3P_1 - x^2 P_0.$$

Ces relations montrent que deux fonctions consécutives ne peuvent pas s'annuler pour une même valeur de x, excepté pour $x = 0$, et, si l'une d'elles s'annule, celles qui la comprennent sont de signes contraires.

Si donc on substitue dans la suite

$$P_{2n}, \quad P_{2n-1}, \quad P_{2n-2}, \quad \dots, \quad P_2, \quad P_1,$$

successivement $-\infty$ et $-\varepsilon$, $+\varepsilon$ et $+\infty$, ε étant aussi voisin que l'on veut de zéro, pour $x = -\infty$, P_{2n} et P_{2n-1} ont le signe de $(-1)^n$; P_{2n-2} et P_{2n-3}, celui de $(-1)^{n-1}$, ...; P_2 et P_1 ont le signe $-$. La suite P_{2n}, P_{2n-1}, ..., P_1 présente donc $n-1$ variations. Pour $x = -\varepsilon$, ε étant suffisamment petit, tous les polynômes ont le signe $-$ et, par suite, ne présentent que des permanences; l'équation $P_{2n} = 0$ a donc $n-1$ racines au moins entre ∞ et $-\varepsilon$.

Pour $x = +\varepsilon$, toutes les fonctions ont le signe $+$; pour $x = +\infty$, elles ont, par groupes de deux, à partir de P_{2n}, les signes de

$$(-1)^{n-1}, \quad (-1)^{n-2}, \quad \dots, \quad (-1), \quad +1;$$

elles présentent donc $n-1$ variations; l'équation $P_{2n}=0$ a donc aussi au moins $(n-1)$ racines réelles entre $+\varepsilon$ et $+\infty$; ceci résultait d'ailleurs aussi de ce que P_{2n} ne renferme que des puissances de x de même parité. L'équation $P_{2n}=0$ a donc au moins $2(n-1)$ racines réelles autres que zéro; elle admet aussi la racine zéro, et, comme elle n'est que de degré $2n-1$, elle a toutes ses racines réelles.

Le même raisonnement s'applique à l'équation $P_{2n-1}=0$ qui est aussi de degré $2n-1$; il suffit de considérer la suite des fonctions

$$P_{2n-1},\quad P_{2n-2},\quad \ldots,\quad P_2,\quad P_1,$$

qui ne présente plus qu'une seule fonction de degré $2n-1$.

On voit, par ce qui précède, que le rapport $\frac{P_{2n}}{P_{2n-1}}$ passe d'une valeur négative à une valeur positive lorsque x, en croissant, traverse une racine négative de l'équation $P_{2n}=0$, et il passe d'une valeur positive à une valeur négative quand x, en croissant, traverse une racine positive de la même équation.

Cela tient à ce que, entre $-\infty$ et zéro, la suite

$$P_{2n},\quad P_{2n-1},\quad P_{2n-2},\quad \ldots,\quad P_2,\quad P_1$$

perd des variations et en gagne entre zéro et $+\infty$.

Il en sera ainsi chaque fois que des polynômes, tous de degré pair ou tous de degré impair, ne renfermant que des puissances de x de même parité, satisferont à des relations de Sturm.

Soit, pour fixer les idées, la suite des polynômes

$$Q_1,\quad Q_2,\quad \ldots,\quad Q_{2n},$$

qui sont les dénominateurs des réduites considérées.

Ces fonctions sont toutes de degré pair et ne renferment que des puissances paires de la variable.

Q_{2n} est de degré $2n$, Q_{2n-1} n'est que de degré $2n-2$.

Cherchons les signes des quotients

$$\frac{Q_{2n}(-a-\varepsilon)}{Q_{2n-2}(-a-\varepsilon)} \quad \text{et} \quad \frac{Q_{2n}(a-\varepsilon)}{Q_{2n-2}(a-\varepsilon)},$$

$Q_{2n}(x)$ désignant le polynôme Q_{2n}, $-a$ et $+a$ deux racines de l'équation $Q_{2n}(x)=0$. On a

$$Q_{2n}(-a-\varepsilon) = -\varepsilon\, Q'_{2n}(-a) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} Q''_{2n}(-a) + \ldots.$$

Pour une valeur de ε suffisamment petite, $Q_{2n}(-a-\varepsilon)$ a le signe de $-\varepsilon\, Q'_{2n}(-a)$; $Q_{2n}(a+\varepsilon)$ a aussi le signe de $-\varepsilon\, Q'_{2n}(a)$, et $Q_{2n-2}(-a-\varepsilon)$, $Q_{2n-1}(a-\varepsilon)$ sont de mêmes signes; mais $Q'_{2n}(-a)$ et $Q'_{2n}(a)$ sont évidemment de signes contraires; donc

$$\frac{Q_{2n}(-a-\varepsilon)}{Q_{2n-2}(-a-\varepsilon)} \quad \text{et} \quad \frac{Q_{2n}(a-\varepsilon)}{Q_{2n-2}(a-\varepsilon)}$$

sont de signes contraires. Si donc le rapport $\frac{Q_{2n}(x)}{Q_{2n-2}(x)}$ passe du négatif au positif quand x, en croissant, traverse une racine négative de $Q_{2n}(x)=0$, il passera du positif au négatif quand x, en croissant, traverse une racine positive de la même équation.

Ces polynômes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2n-1}, Q_{2n}, \ldots$ jouissent de propriétés analogues à celles des polynômes P; les racines des équations $Q_\mu = 0$ sont toutes réelles; on le montre comme on l'a fait pour les équations $P_\mu = 0$.

J'ai fait voir (*même Recueil*, t. XIX, 2[e] série) que le polynôme U_m, qui est le premier membre de l'équation qui donne $\tang\frac{a}{m}$ lorsque $\tang a$ est donnée, est le premier terme d'une suite de Sturm qui jouit de propriétés analogues à celles des polynômes précédents;

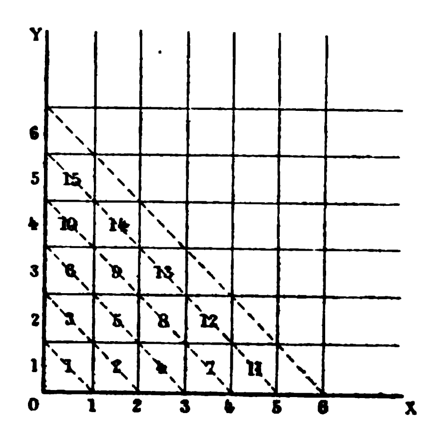
mais U_m n'a pas, comme les précédents, ses termes tous de degrés pairs ou impairs, et les degrés des polynômes U_m, U_{m-1}, ... ne décroissent que d'une unité quand on passe de l'un d'eux au suivant.

La démonstration précédente fait voir aussi que les racines des équations $P_\mu = 0$, $Q_\mu = 0$ sont distinctes.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1887.

Mathématiques élémentaires.

Soit un angle droit XOY dont le côté OX est horizontal et dirigé de gauche à droite, et dont le côté vertical OY est dirigé de bas en haut. On partage la portion de plan comprise dans cet angle en un nombre infini



de carrés égaux par des parallèles à OX et par des parallèles à OY. Ces carrés peuvent être groupés soit par bandes horizontales, soit par bandes verticales, et

chaque carré appartient à la fois à une bande horizontale et à une bande verticale. On numérote les bandes verticales en allant de gauche à droite, et en commençant par celle qui est limitée d'un côté par OY; on numérote les bandes horizontales de bas en haut, en commençant par celle qui est limitée d'un côté par OX. Le numéro x d'une bande verticale, et le numéro y d'une bande horizontale déterminent la position du carré contenu dans ces deux bandes. Ces deux nombres entiers x et y seront appelés les *coordonnées* du carré dont ils fixent la position.

D'autre part, les carrés peuvent être groupés par *files obliques* contenant, la première un carré, la deuxième 2, la troisième 3, et ainsi de suite; et, si l'on numérote les carrés, en donnant le n° 1 au carré de la première file, les n°s 2 et 3 aux carrés de la deuxième en allant sur cette file de OX vers OY, les n°s 4, 5, 6 aux carrés de la troisième en allant sur cette file de OX vers OY, et ainsi de suite, comme l'indique la figure ci-jointe, le *numéro* d'un carré détermine à lui seul la position de ce carré dans l'angle XOY.

Soit z le *numéro* d'un carré dont les *coordonnées* sont x et y; à tout groupe de deux nombres entiers x et y correspondra un nombre entier z, et, réciproquement, à tout nombre entier z correspondra un groupe de deux nombres entiers x et y.

Cela posé, on montrera qu'entre les coordonnées x et y de l'un quelconque des carrés d'une même file oblique de rang k et le nombre k il y a une relation, et l'on résoudra les questions suivantes :

1° Connaissant les *coordonnées* x et y d'un carré, déterminer le *numéro* z de ce carré. Appliquer en supposant x égal à 27, et y égal à 41.

2° Connaissant le *numéro* z d'un carré, trouver les

coordonnées x, y de ce carré. Appliquer en supposant z égal à 248.

3° Compter, parmi les n carrés dont les *numéros* sont 1, 2, 3, ..., n, combien il y en a pour lesquels la somme $x+y$ des coordonnées est un nombre pair, et combien pour lesquels le produit xy des coordonnées est un nombre pair. Appliquer dans le cas de n égal à 157, et dans le cas de n égal à 180.

4° Les lettres x et y représentant toujours les *coordonnées* d'un carré dont le *numéro* est z, et a étant un nombre donné quelconque, plus grand que 1, trouver les valeurs qu'il faut donner à z pour que l'expression

$$ax+(a+2)y-2z$$

prenne la plus grande valeur possible. Appliquer dans les trois cas suivants :

$$a=9,\qquad a=10,\qquad a=9,5.$$

CONCOURS D'ADMISSION POUR L'ÉCOLE CENTRALE (JUILLET 1887).

Géométrie analytique.

On considère toutes les coniques qui ont un foyer en un point donné F, et qui passent par deux points donnés A et B.

1° Montrer que ces coniques forment deux séries telles que, pour toute conique d'une série, la directrice correspondant au foyer F passe par un point fixe de la droite AB, situé entre A et B, tandis que pour toute conique de l'autre série la directrice correspondant au

foyer F passe par un point fixe de la droite AB, non situé entre A et B.

2° Trouver le lieu des centres des coniques considérées et montrer qu'il se compose de deux coniques homofocales.

3° Prenant un point C sur le lieu précédent, reconnaître, d'après la position qu'il occupe sur ce lieu, si la conique considérée dont le point C est centre est telle que les points A et B sont sur une même branche ou sur deux branches différentes de cette conique.

4° Si le point C est tel que les points A et B sont sur une même branche de la conique considérée, reconnaître, d'après la position du point C, si cette conique est du genre ellipse, ou du genre hyperbole, et, dans ce dernier cas, si les points A et B sont sur la branche voisine du point F, ou sur l'autre.

Nota. — On prendra pour axe des x la droite AB et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite menée par le milieu de AB.

Épure.

On donne un cylindre C dont les génératrices sont parallèles au plan vertical de projection et un plan $P\alpha P'$ perpendiculaire à ce même plan vertical.

Le cylindre a pour trace horizontale un cercle ω de $0^m,060$ de rayon, dont le centre O se trouve à $0^m,170$ en avant du plan vertical et à $0^m,065$ du bord droit du cadre; ses génératrices forment un angle de 60° avec le plan horizontal et l'on s'élève sur chacune d'elles en se déplaçant de droite à gauche.

Le plan $P\alpha P'$ forme de même un angle de 60° avec le plan horizontal et est incliné de manière à couper le cylindre. Sa trace horizontale αP se trouve à gauche de

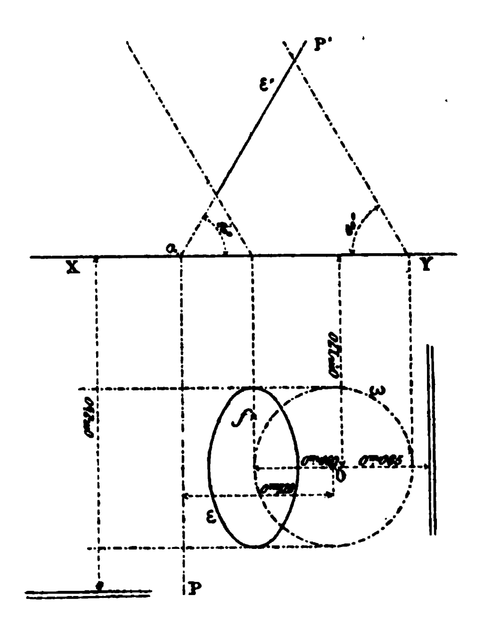
O, à une distance de ce point égale au diamètre du cercle ω.

Ceci posé, on demande :

1° De construire la projection horizontale ε de l'intersection (ε, ε′) du plan et du cylindre;

2° De construire les contours apparents en projection de la surface de révolution S engendrée par la rotation de la courbe (ε, ε′) autour d'un axe vertical mené par le foyer *f* de l'ellipse ε le plus voisin du plan vertical;

3° De construire les projections de l'intersection de la surface S et du cylindre C.



Dans la mise à l'encre, on supposera le cylindre C et le plan PαP′ enlevés, et l'on représentera la partie de la *surface* S extérieure au cylindre, en indiquant les constructions pour déterminer un point quelconque, sa

tangente et les points remarquables de l'intersection de ces deux surfaces. Ces constructions seront succinctement expliquées dans une légende placée au bas de la feuille de dessin.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Intersection de surfaces.

Prendre la ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre à $0^m,240$ du petit côté inférieur.

Calcul trigonométrique.

On donne, dans un triangle, deux côtés b, c et l'angle compris, A :

$$b = 45636^m,25,$$
$$c = 21274^m,33,$$
$$A = 35^\circ 28' 54'',6.$$

On demande de calculer les autres éléments et la surface de ce triangle.

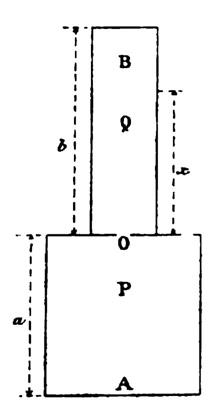
Physique.

I. Deux vases cylindriques verticaux P et Q sont superposés ; l'un P est un récipient fermé de base A^{cq} et de hauteur a^{cm} et contient de l'air sec sous la pression H de l'atmosphère ; l'autre Q, est un tube ouvert à sa partie supérieure, de base B^{cq} et de hauteur b^{cm}, plein d'eau.

Un orifice O assez petit permet de mettre en communication ces deux vases, de façon que l'eau puisse s'écouler de Q en P sans que l'air renfermé en P puisse s'échapper.

Cet orifice étant ouvert, on demande à quelle hauteur x se fixera le niveau de l'eau dans le tube Q quand l'écoulement aura cessé.

Supposer la température constante et égale à 0.
Négliger le volume de l'eau transformée en vapeur.



Prendre la densité de l'eau égale à l'unité; et la densité du mercure égale à 13,6.

II. *Exemple numérique :*

$A = 50^{cq}$, $B = 4^{cq}$,
$a = 10^{cm}$, $b = 125^{cm}$.

Tension de la vapeur d'eau à 0° :

$f = 0^{cm},46$ de mercure à 0°.

Pression atmosphérique :

$H = 76^{cm},66$ de mercure à 0°.

Chimie.

I. On introduit dans un eudiomètre à mercure 20^{cc} d'un gaz inconnu, 50^{cc} d'oxygène et, pour faciliter la réaction, une quantité convenable d'un mélange détonant obtenu par la décomposition de l'eau par la pile.

Après le passage de l'étincelle, il reste 70^{cc} d'un ré-

sidu gazeux dans lequel la potasse absorbe 40^{cc} d'acide carbonique, et le phosphore 10^{cc} d'oxygène resté libre. Le résidu final de 20^{cc} est de l'azote.

On demande, d'après cette expérience :

1° De déterminer la composition et la formule du gaz mis en expérience;

2° De calculer sa densité.

On donne

Équivalents en volume....	$O = 1$,	
	$Az = 2$,	
	$CO^2 = 2$,	
Densités rapportées à l'air	O	1,1056,
	Az	0,972,
	CO^2	1,529.

II. Classification des métalloïdes. — Division en familles.

CONCOURS POUR L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1887).

Mathématiques élémentaires.

On donne deux cercles S et Σ ayant pour centres les points O et ω, pour rayons r et ρ; le cercle S est supposé intérieur au cercle Σ, et le point ω intérieur au cercle S :

1° Démontrer que tous les cercles T tangents extérieurement au cercle S et orthogonaux au cercle Σ touchent un troisième cercle fixe;

2° On prend une droite DD' perpendiculaire à la ligne des centres ωO, et un point P sur cette ligne des

centres. Soient ωA, ωB les tangentes menées du point ω à l'un des cercles T, A' et B' les points d'intersection de la droite DD' avec les bissectrices des angles $A\omega O$ et $B\omega O$; démontrer que les points A' et B' forment deux divisions homographiques quand le cercle T varie;

3° Étudier les variations de l'angle A'PB';

4° Soient $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ une suite de cercles T orthogonaux au cercle Σ, le premier aux points A_1 et A_2, le second aux points A_2 et A_3, le troisième aux points A_3 et $A_4, \ldots$, le $n^{\text{ième}}$ aux points A_n et A_{n+1}; démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que le point A_{n+1} coïncide avec le point A_1 est que l'on puisse satisfaire à une relation de la forme

$$\tang \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2r\rho}\sqrt{(\rho^2 + d^2 - r^2)^2 - 4d^2\rho^2},$$

le nombre k étant entier, et d désignant la distance ωo.

Mathématiques spéciales.

1° Démontrer que le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à une conique S soient conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes menées du même point à une autre conique S' est une troisième conique Σ qui passe par les points de contact A, B, C, D et A', B', C', D' des tangentes communes aux deux coniques S et S'.

2° Démontrer qu'il existe quatre circonférences de cercles réels passant chacune par deux des foyers de la conique S et deux des foyers de la conique S'.

3° Soient A et A' les points de contact des coniques S et S' avec une de leurs tangentes communes; démontrer que, si le point A' est la projection du centre de la

conique S sur la tangente AA′, les normales à la conique S′ aux points B′, C′, D′ se coupent en un point M qui reste fixe quand le cercle Σ varie en passant constamment par les points A et A′.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Théorie. — Une surface étant définie par trois équations de la forme

$$x = F_1(u, v), \qquad y = F_2(u, v), \qquad z = F_3(u, v),$$

dans lesquelles x, y, z désignent des coordonnées rectangulaires, u et v des variables indépendantes :

1° Déterminer, en fonction de u et de v, les rayons de courbure principaux de la surface en un de ses points et les coordonnées des centres de courbure correspondants ;

2° Former, au moyen des mêmes variables, l'équation différentielle des lignes de courbure et celle des lignes asymptotiques.

Application. — Appliquer les résultats trouvés au cas où la surface est définie par les équations suivantes :

$$(\mathrm{A})\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int (1-u^2) f(u)\,du + \frac{1}{2}\int (1-v^2)\varphi(v)\,dv, \\ y &= \frac{i}{2}\int (1+u^2) f(u)\,du - \frac{i}{2}\int (1+v^2)\varphi(v)\,dv, \\ z &= \int u f(u)\,du + \int v\varphi(v)\,dv. \end{aligned} \right.$$

3° Étudier en particulier les lignes de courbure de la surface représentée par les formules (A) dans le cas où

l'on pose

$$f(u) = \frac{2m^2}{(m^2+u^2)^2}, \qquad \varphi(v) = \frac{2m^2}{(m^2+v^2)^2},$$
$$u = m \operatorname{tang}\frac{\lambda+\mu i}{2}, \qquad v = m \operatorname{tang}\frac{\lambda-\mu i}{2}.$$

Composition de Mécanique rationnelle.

Un solide homogène, non pesant, a la forme d'un cône de révolution dont le sommet est un point O; la hauteur OM de ce cône étant a, le rayon de sa base est $2a$. Ce solide peut tourner librement autour du point O, supposé fixe; chacun de ses éléments est attiré vers un point fixe F avec une intensité égale au produit d'une constante ω^2 par la masse de l'élément et par sa distance au point F. La longueur OF est égale à $\frac{8}{5}a$.

A l'instant initial, l'angle MOF est droit, l'axe instantané de rotation du solide coïncide avec la bissectrice de cet angle et la vitesse de rotation est $\omega\sqrt{2}$.

Cela posé, on demande de déterminer le mouvement ultérieur du solide et d'exprimer, en fonction de l'angle MOF, les composantes de la réaction exercée par le cône sur le point auquel est fixé son sommet.

Déterminer les cônes décrits par l'axe instantané de rotation dans le solide et dans l'espace; indiquer comment ils sont placés l'un par rapport à l'autre aux diverses époques du mouvement.

On montrera que les traces respectives H et H_1 de ces cônes sur les plans P, P_1, perpendiculaires, le premier à OM, le second à OF, sont des courbes du genre des herpolhodies. On cherchera les surfaces du second ordre qui, en se mouvant de manière à définir chacune un *mouvement de Poinsot* autour du point O, toucheraient

les plans P et P_1 aux différents points des courbes H et H_1.

On rappelle que le mouvement d'un solide autour d'un point fixe peut être déterminé par les équations

$$\mathrm{A}\frac{dp}{dt}+(\mathrm{C}-\mathrm{B})qr=\mathrm{L},$$

$$\mathrm{B}\frac{dq}{dt}+(\mathrm{A}-\mathrm{C})rp=\mathrm{M},$$

$$\mathrm{C}\frac{dr}{dt}+(\mathrm{B}-\mathrm{A})pq=\mathrm{N};$$

$$p=\cos\varphi\frac{d\theta}{dt}+\sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt},$$

$$q=-\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}+\cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt},$$

$$r=\frac{d\varphi}{dt}+\cos\theta\frac{d\psi}{dt}.$$

SUR LE MAXIMUM D'UN PRODUIT DE PLUSIEURS FACTEURS POSITIFS DONT LA SOMME EST CONSTANTE;

PAR M. E. GOURSAT.

Dans un des derniers numéros du *Bulletin des Sciences mathématiques,* M. Darboux a publié une démonstration fort élégante, et à l'abri de toute objection, du théorème classique sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante. La démonstration suivante qui se rapproche davantage de la démonstration habituelle, est également rigoureuse.

Rappelons d'abord la formule

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

d'où l'on déduit que le produit de deux facteurs positifs, dont la somme est constante, augmente lorsque leur différence diminue.

Cela posé, considérons p facteurs positifs a, b, c, ..., l dont la somme est supposée constante et égale à S, et désignons par m la moyenne arithmétique de ces p facteurs, de telle sorte que l'on ait

$$S = mp.$$

Il s'agit de montrer que le produit

$$(1) \qquad P = abc \ldots l$$

est inférieur à m^p, à moins que tous les facteurs a, b, ..., l ne soient égaux à m. En effet, si tous ces facteurs ne sont pas égaux, il y aura au moins un facteur inférieur à m et au moins un facteur supérieur à m. Soit $m - h$ un facteur inférieur à m, et $m + k$ un facteur supérieur à m. Sans toucher aux autres facteurs du produit P, remplaçons $m - h$ par m et $m + k$ par $m + k - h$; nous obtenons un nouveau produit

$$(2) \qquad P' = a'b'c' \ldots l'$$

jouissant des propriétés suivantes : 1° la somme des facteurs de ce produit est encore égale à S; 2° le produit P' est supérieur au produit P; en effet, on a remplacé deux facteurs dont la différence était $h + k$ par deux facteurs ayant même somme que les premiers et dont la différence est inférieure à $h + k$; 3° le nombre des facteurs de P' différents de m est inférieur au moins d'une unité au nombre des facteurs de P différents de m.

En opérant sur le produit P' comme on a opéré sur le produit P, et ainsi de suite, autant de fois qu'il sera nécessaire, on finira par arriver à un produit composé

de p facteurs égaux à m. Comme, dans cette suite d'opérations, chaque produit est plus grand que le précédent, il en résulte que le produit P d'où l'on est parti est inférieur à m^p. C. Q. F. D.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES POLYGONES FUNICULAIRES;

PAR M. E. ROUCHÉ [1].

DÉFINITION DES POLYGONES FUNICULAIRES.

1. Si, sur la ligne d'action d'une force, on porte, à partir du point où cette force est appliquée et dans le sens suivant lequel elle agit, une longueur ayant avec l'unité de longueur un rapport égal à celui de la force à l'unité de force, on obtient un segment rectiligne qu'on nomme *segment représentatif* de la force. Nous donnerons le nom de *vecteur* de la force à tout segment ayant la même grandeur, la même direction et le même sens que le segment représentatif. Tandis que le segment représentatif détermine la force en grandeur, *position* et sens, le vecteur ne donne que la grandeur, la *direction* et le sens de la force.

Nous nommerons *polygone des vecteurs* d'un système de forces F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 la ligne brisée

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6,$$

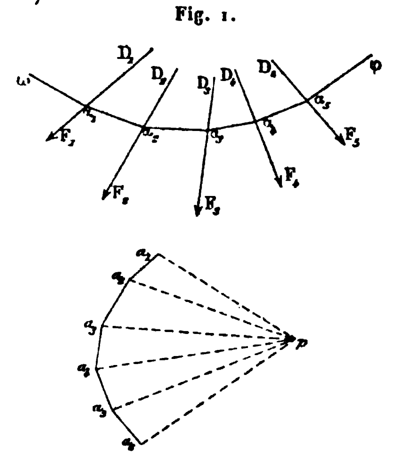
obtenue en menant bout à bout, à partir d'une origine arbitraire a_1, les vecteurs respectifs $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_4$,

---

[1] Extrait des Leçons de Statique graphique faites au Conservatoire des Arts et Métiers en 1886-1887.

$a_4 a_5$, $a_5 a_6$ des forces considérées. Il est clair que la connaissance des points d'application des forces et du polygone des vecteurs définit pleinement un système de forces (*fig.* 1).

Fig. 1.



Quand les forces sont appliquées à un corps rigide, on peut déplacer le point d'application de chacune d'elles sur sa ligne d'action. On définit alors le système en donnant, outre le polygone des vecteurs

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5,$$

les lignes d'action D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 des forces, lignes d'action qui sont d'ailleurs respectivement parallèles aux côtés $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_4$, $a_4 a_5$, $a_5 a_6$ du polygone des vecteurs.

2. Nous ne considérerons ici que des forces appliquées à un corps rigide et *toutes situées dans un même plan.*

Un tel système (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) étant donné par les lignes d'action D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 et le polygone

des vecteurs $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$, prenons à volonté dans le plan des forces un point p auquel nous donnerons le nom de *pôle* du polygone des vecteurs, et joignons ce pôle aux divers sommets de ce polygone par des droites pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, pa_5, pa_6 que nous nommerons *rayons polaires.*

Menons une parallèle quelconque $\omega\alpha_1$ au premier rayon pa_1, jusqu'à sa rencontre α_1 avec la ligne d'action D_1 de la première force F_1; puis, tirons par α_1 la parallèle $\alpha_1\alpha_2$ au second rayon jusqu'à sa rencontre α_2 avec la ligne d'action D_2 de la seconde force F_2; et ainsi de suite. Enfin par le point α_5 où la parallèle $\alpha_4\alpha_5$ à l'avant-dernier rayon pa_5 rencontre la ligne d'action D_5 de la dernière force F_5, menons $\alpha_5\varphi$ parallèle au dernier rayon pa_6.

Nous obtiendrons de la sorte une ligne brisée

$$\omega\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\varphi,$$

dont le premier et le dernier côté $\omega\alpha_1$ et $\alpha_5\varphi$ sont indéfinis, et à laquelle on donne le nom de *polygone funiculaire,* relatif au pôle p, du système des forces considérées.

Pour que la construction réussisse, il faut que chacune des lignes $\omega\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, ... coupe la ligne d'action de la force suivante; il en sera toujours ainsi, si l'on choisit pour pôle p un point non situé sur les côtés du polygone des vecteurs ou sur leurs prolongements; car les rayons polaires coupant alors les côtés de ce polygone, les parallèles à ces rayons couperont les lignes d'action correspondantes.

Dans le cas où les forces sont parallèles, la construction d'un polygone funiculaire n'offre aucune particularité, mais les côtés du polygone des vecteurs sont alors sur une même ligne droite et le pôle p peut être pris à

volonté en dehors de cette droite indéfiniment prolongée.

Enfin, dans le cas d'une force unique, le polygone des vecteurs se réduit à un segment unique $a_1 a_2$, et un polygone funiculaire se compose seulement de deux côtés indéfinis $\omega\alpha$, $\alpha\varphi$ qu'on obtient en menant, par un point quelconque α de la ligne d'action, des parallèles aux deux rayons polaires pa_1 et pa_2.

Dans les figures suivantes, pour ne pas compliquer inutilement, nous désignerons par la même lettre une force quelconque et sa ligne d'action; nous emploierons d'ailleurs la notation

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$$

pour désigner le système des forces ayant $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pour lignes d'action et $a_1 a_2 \ldots a_{n+1}$ pour polygone des vecteurs.

Lemmes de Géométrie.

3. *Soient* ABC, A′B′C′ *deux triangles tels que les côtés* AB *et* AC *de l'un soient respectivement parallèles aux côtés* A′B′ *et* A′C′ *de l'autre. Si par le sommet* A *du premier on mène la parallèle* AD *à la base* B′C′ *du second, et que par le sommet* A′ *du second on mène la parallèle* A′D′ *à la base* BC *du premier, les points* D *et* D′ *diviseront les bases* BC *et* B′C′ *en parties inversement proportionnelles* (*fig.* 2).

En effet, les triangles ABD, A′B′D′ ayant leurs côtés parallèles sont semblables et donnent, en grandeur et en signe, la proportion

$$\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{D'A'}}{\mathrm{D'B'}};$$

on a de même, par les triangles semblables ADC,

A′D′C′,

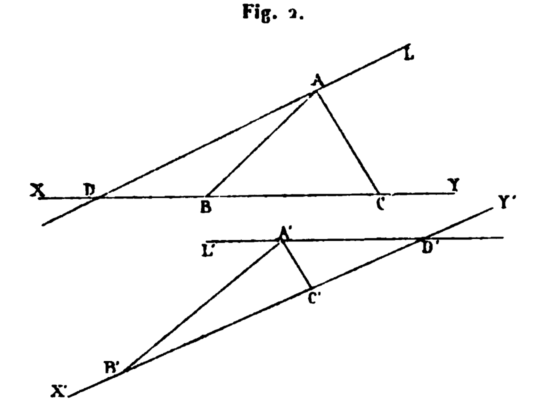
$$\frac{DA}{DC} = \frac{D'C'}{D'A'};$$

et il suffit de multiplier ces deux égalités membre à membre pour obtenir la relation

(1) $$\frac{DB}{DC} = \frac{D'C'}{D'B'},$$

qui exprime le théorème énoncé.

Fig. 2.



Il résulte d'ailleurs de l'égalité de ces rapports en grandeur et en signe que : *suivant que* D *tombe entre* B *et* C, *sur le prolongement de* BC *ou sur le prolongement de* CB, D′ *tombe entre* B′ *et* C′, *sur le prolongement de* C′B′ *ou sur le prolongement de* B′C′; la valeur commune des rapports (1) est dans le premier cas négative, dans le second cas supérieure à 1, enfin dans le troisième cas comprise entre 0 et 1.

4. De la proposition qui précède on déduit immédiatement la suivante :

Les bases BC, B′C′ *de deux triangles variables* ABC,

$A'B'C'$ *étant fixes, et les côtés* AB *et* AC *restant respectivement parallèles à* $A'B'$ *et* $A'C'$, *si le sommet* A *du premier triangle décrit une droite* L *parallèle à la base* $B'C'$ *du second, le sommet* A' *du second triangle décrira une droite* L' *parallèle à la base* BC *du premier*.

En effet, soit A une position quelconque, sur la droite L, du sommet du premier triangle; si, par la position correspondante A' du sommet du second triangle, on mène la parallèle $A'L'$ à BC, le point D' où cette parallèle coupera $B'C'$ devra, d'après le théorème précédent, diviser la base $B'C'$ dans un rapport constant. Donc ce point D' restera fixe quand le point A se déplacera sur la droite L; par suite, le point A' restera sur la parallèle L' menée par le point fixe D' à la base immobile BC.

5. Nous supposerons connus du lecteur les tracés usuels relatifs aux figures homologiques (¹).

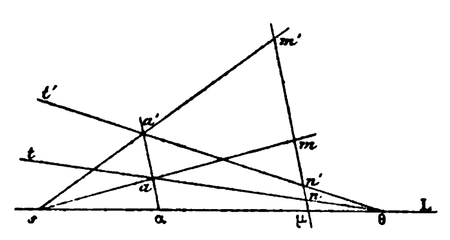
Toutefois nous croyons devoir ajouter ici quelques mots sur le cas important où le *centre d'homologie est à l'infini* dans une direction donnée. Un couple (a, a') de points homologues suffit pour indiquer cette *direction homologique;* L désignant l'*axe d'homologie*, on obtient alors l'homologue m' d'un point quelconque m de la première figure Σ en prenant l'intersection de la parallèle $m\mu$ à aa' et de l'homologue sa' de la droite sa qui joint le point m au point a (*fig.* 3). La proportion évidente

$$\frac{\mu m'}{\mu m} = \frac{\alpha a'}{\alpha a}$$

(¹) *Voir* le *Traité de Géométrie* de MM. E. Rouché et de Comberousse (5ᵉ édition, nᵒˢ 728, 729 et 730).

prouve que le rapport $\frac{\mu m'}{\mu m}$ est constant, en sorte qu'on déduit la seconde figure Σ' de la première Σ en dilatant dans un rapport constant, qu'on nomme *rapport d'homologie,* les ordonnées $\alpha a, \ldots, \mu m, \ldots$, comptées à partir de l'axe d'homologie L parallèlement à la direction homologique.

Fig. 3.



On peut même donner un peu plus d'extension à cette règle en comptant les ordonnées parallèles à la direction homologique à partir d'une droite quelconque $t\theta$ pour la première figure Σ pourvu que l'on compte les ordonnées de la seconde figure Σ' à partir de la droite $t'\theta$ homologue de $t\theta$; car, si n et n' désignent les points où $t\theta$ et $t'\theta$ rencontrent $\mu m m'$, les rapports

$$\frac{\mu m'}{\mu m}, \quad \frac{\mu n'}{\mu n}$$

étant égaux l'un et l'autre au rapport ρ d'homologie, il en sera de même du rapport

$$\frac{\mu m' - \mu n'}{\mu m - \mu n} \quad \text{ou} \quad \frac{n'm'}{nm}.$$

Axe commun a deux polygones funiculaires d'un même système de forces.

6. *Si l'on considère deux polygones funiculaires quelconques relatifs à un même système de forces, les*

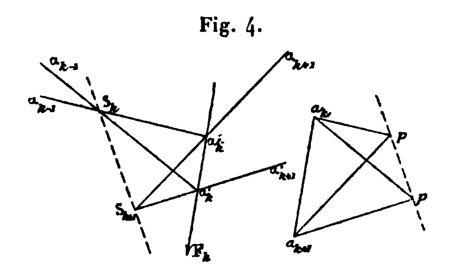
points où les côtés du premier rencontrent respectivement les côtés homologues du second sont situés sur une même droite.

Cette ligne, que nous nommerons l'*axe commun aux deux polygones, est parallèle à la droite qui joint les deux pôles et est située à distance finie, si les deux polygones ont des pôles distincts; elle est à l'infini, si les deux polygones ont le même pôle.*

Le théorème est évident dans le dernier cas; car, lorsque les deux polygones funiculaires ont le même pôle, deux côtés homologues quelconques sont parallèles entre eux.

Il suffit donc de s'occuper du premier cas. Désignons les deux polygones funiculaires par P et P' et leurs pôles respectifs par p et p'; appelons en général S_k l'intersection des deux côtés $\alpha_{k-1}\alpha_k$, $\alpha'_{k-1}\alpha'_k$ de rang k, les-

Fig. 4.



quels sont respectivement parallèles aux rayons polaires pa_k, $p'a_k$; d'ailleurs α_k et α'_k sont situés sur la ligne d'action de la force F_k dont le vecteur est $a_k a_{k+1}$. Considérons les deux triangles $a_k pp'$, $S_k \alpha_k \alpha'_k$; le côté $a_k p$ est parallèle à $S_k a_k$ et le côté $a_k p'$ est parallèle à $S_k \alpha'_k$. Si, les bases pp', $\alpha_k \alpha'_k$ restant fixes, les sommets a_k et S_k se déplacent de manière que les côtés qui étaient d'abord parallèles conservent leur parallélisme, $a_{k+1}pp'$

et $S_{k+1}\alpha_k\alpha'_k$ seront deux autres positions correspondantes des triangles variables. Mais le déplacement $a_k a_{k+1}$ du sommet du premier étant parallèle à la base $\alpha_k\alpha'_k$ du second, il faut (n° 4) que le déplacement $S_k S_{k+1}$ du sommet du second soit parallèle à la base pp' du premier. Ainsi tous les segments S_1S_2, S_2S_3, ..., S_nS_{n+1} sont parallèles à pp', et, comme chacun d'eux a un point commun avec le suivant, tous ces segments sont sur une même droite parallèle à pp'. D'ailleurs cette droite est à distance finie; car, puisque les pôles p et p' ne sont pas situés sur les côtés (indéfiniment prolongés) du polygone des vecteurs, de deux sommets consécutifs a_k, a_{k+1} de ce polygone, l'un au moins, a_k par exemple, n'est pas en ligne droite avec pp'; les rayons polaires pa_k, $p'a_k$ sont dès lors distincts, et par suite les côtés $\alpha_{k-1}\alpha_k$, $\alpha'_{k-1}\alpha'_k$, qui sont respectivement parallèles à ces rayons, se rencontrent en un point S_k situé à distance finie.

7. Ce théorème facilite le tracé des polygones funiculaires satisfaisant à certaines conditions. Voici un exemple :

Étant donné un polygone funiculaire $P\omega\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, *de pôle* p, *pour un système de forces*

$$(F_1, F_2, F_3, F_4;\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),$$

construire pour ce même système de forces un second polygone funiculaire P′, *de pôle donné* p', *et dont un côté de rang assigné, le second, par exemple, passe par un point donné* I.

On aura d'abord le second côté $\alpha'_1\alpha'_2$ du polygone P′ en menant par I la parallèle au rayon polaire pa_2; on en déduira le point S_2, intersection des deux seconds côtés,

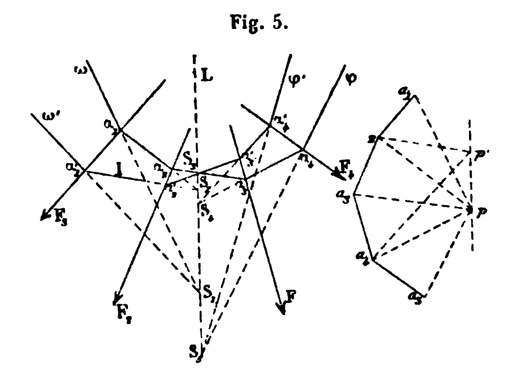
et enfin l'axe L commun aux deux polygones P et P' en menant par S_2 la parallèle à pp'.

Cela fait, au lieu de construire le polygone P' d'après la définition même du n° 2, on pourra employer l'axe L :

Soit pour tracer immédiatement un côté de rang assigné; on obtiendra, par exemple, le quatrième $\alpha'_3\alpha'_4$ en menant, par le point S_4 où l'axe L rencontre $\alpha_3\alpha_4$, une parallèle au rayon $p'a_4$;

Soit pour tracer les côtés successifs du polygone P' sans faire intervenir le polygone des vecteurs; en pre-

Fig. 5.



nant, en effet, les points S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 où l'axe L rencontre les côtés $\omega\alpha_1$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_4\varphi$ du polygone P, on aura de proche en proche les côtés correspondants $\omega'\alpha'_1$, $\alpha'_2\alpha'_3$, $\alpha'_3\alpha'_4$, $\alpha'_5\varphi'$ en menant successivement $S_1\alpha'_1$, $S_3\alpha'_2$, $S_4\alpha'_3$, $S_5\alpha'_4$.

Lieu du point de rencontre de deux cotés de rangs assignés.

8. *Si, dans chacun des polygones funiculaires (en nombre infini) qui sont relatifs à un même système de forces, on prend le point de rencontre du côté de rang*

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur de Mécanique physique à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Analyse infinitésimale**, à l'usage des personnes qui étudient cette Science en vue de ses applications mécaniques et physiques. 2 vol. in-8, avec figures dans le texte.

On vend séparément :

TOME I. — *Calcul différentiel.*

Fascicule I. — Partie élémentaire; 1887 .... 7 fr. 50 c.
Fascicule II. — Compléments; 1887 .... 9 fr. 50 c.

TOME II. — *Calcul intégral.*

Fascicule I. — Partie élémentaire .... (*Sous presse.*)
Fascicule II. — Compléments .... (*Sous presse.*)

En offrant cet Ouvrage à l'Académie des Sciences, dans la séance du 27 juin 1887, M. Boussinesq s'est exprimé ainsi :

Ce Cours d'Analyse s'adresse surtout aux physiciens, naturalistes, élèves ingénieurs, philosophes, etc., peu habitués au maniement des formules algébriques, mais qui éprouvent le besoin, pour leurs études propres, de connaître, dans son esprit et dans ses principaux résultats, le calcul des infiniment petits ou des fonctions continues.

J'espère, en les conduisant pas à pas par les voies qui m'ont paru les plus intuitives, les mieux appropriées à notre sentiment naturel de la graduelle variation des choses, les y familiariser avec les idées et les méthodes qui ont valu à ce puissant instrument intellectuel, toujours en voie d'accroissement depuis le XVII[e] siècle, sa merveilleuse coopération aux progrès des Sciences de la nature et une place presque aussi grande dans l'enseignement des Écoles techniques que dans celui de nos Facultés.

BRISSE (Ch.), Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Condorcet, Répétiteur de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique. — **Cours de Géométrie descriptive.**

I[re] PARTIE, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques élémentaires. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1882 .... 5 fr.

II[e] PARTIE, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1887.
Prix pour les souscripteurs .... 7 fr.
Un premier fascicule a paru.

DARBOUX (Gaston). — **Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences. — Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** Deux volumes grand in-8, avec figures, se vendant séparément :

I[re] PARTIE : *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima*; 1887. 15 fr.

II[e] PARTIE : *Théorie des systèmes de rayons rectilignes. — Formules de Codazzi. Lignes géodésiques. Théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* .... (*Sous presse.*)

ROUCHÉ (Eugène), Professeur à l'École Centrale, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, etc., et **COMBEROUSSE (Charles de)**, Professeur à l'École Centrale et au Conservatoire des Arts et Métiers, etc. — **Traité de Géométrie**, conforme aux Programmes officiels, renfermant un très grand nombre d'Exercices et plusieurs Appendices consacrés à l'exposition des PRINCIPALES MÉTHODES DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE. 5[e] édition, revue et notablement augmentée. In-8 de XLIX-966 pages, avec 616 figures dans le texte, et 1095 questions proposées; 1883 .... 16 fr.

Prix de chaque Partie :

I[re] PARTIE. — *Géométrie plane* .... 7 fr.
II[e] PARTIE. — *Géométrie de l'espace; Courbes et surfaces usuelles* .... 9 fr.

TABLE DES MATIÈRES.

Septembre 1887.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION.

RÉDIGÉ PAR

M. Ch. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE.

OCTOBRE 1887.

S'adresser, pour la rédaction,
à M. Brisse, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine),
ou à M. Rouché, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

COMBEROUSSE (Charles de), Ingénieur civil, Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers et à l'École Centrale des Arts et Manufactures. — **Cours de Mathématiques**, à l'usage des Candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure et à l'École centrale des Arts et Manufactures. 6 volumes in-8, avec figures dans le texte.

Chaque Volume se vend séparément :

TOME Ier. — *Arithmétique* et *Algèbre élémentaire* (avec 38 figures dans le texte). 3e édition; 1884 .... 10 fr.

On vend séparément :

Arithmétique .... 4 fr.
Algèbre élémentaire .... 6 fr.

TOME II. — *Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace. — Trigonométrie rectiligne et sphérique* (avec 499 figures dans le texte). 2e édition; 1882 .... 12 fr.

On vend séparément :

Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace. 7 fr.
Trigonométrie rectiligne et sphérique, suivie de Tables des valeurs des lignes trigonométriques naturelles .... 5 fr.

TOME III. — *Algèbre supérieure.* Ire Partie : *Compléments d'Algèbre élémentaire* (*Déterminants, fractions continues, etc.*). — *Combinaisons.* — *Séries.* — *Étude des Fonctions.* — *Dérivées et Différentielles.* 2e édition; 1887 .... 15 fr.

TOME IV. — *Algèbre supérieure.* IIe Partie : *Etude des imaginaires. Théorie générale des Équations.* 2e édition .... (*Sous presse.*)

TOME V. — *Géométrie analytique, plane et dans l'espace. Éléments de Géométrie descriptive.* 2e édition .... (*Sous presse.*)

TOME VI. — *Éléments de Géométrie supérieure, Notions sur la résolution des problèmes.* 2e édition .... (*En préparation.*)

ROUCHÉ (Eugène) et **COMBEROUSSE (Charles de)**. — **Éléments de Géométrie**, entièrement conformes aux derniers programmes d'enseignement des classes de troisième, de seconde, de rhétorique et de philosophie, suivis d'un **Complément à l'usage des Élèves de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales**, et de *Notions sur le Lever des plans, l'Arpentage et le Nivellement.* 3e édition. In-8 de xxxv-540 pages, avec 464 figures dans le texte et 543 questions proposées et exercices; 1881 .... 6 fr.

Ces nouveaux **Éléments de Géométrie** (qu'il ne faut pas confondre avec le **Traité de Géométrie** des mêmes auteurs) sont entièrement conformes aux derniers programmes officiels. Ils renferment toutes les parties de la Géométrie enseignées successivement dans les établissements d'instruction publique, depuis la classe de troisième jusqu'à celle de Mathématiques spéciales inclusivement, et sont destinés aux élèves appelés à suivre ces différents Cours.

SALMON (G.), Professeur au collège de la Trinité, à Dublin. — **Leçons d'Algèbre supérieure**. Traduit de l'anglais par O. CHEMIN, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École nationale des Ponts et Chaussées. Deuxième édition française, publiée d'après la quatrième édition anglaise; 1886.

Un premier fascicule a paru.

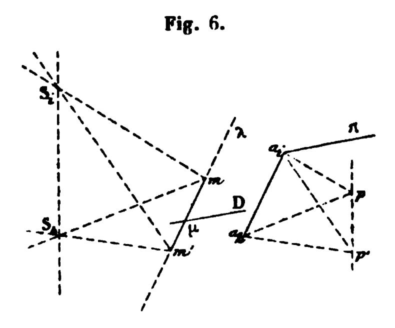
Prix de l'Ouvrage complet pour les souscripteurs .... 9 fr.

i et du côté de rang k, le lieu de ces points est une droite parallèle à la corde $a_i a_k$ qui, dans le polygone des vecteurs, joint l'origine du côté de rang i à l'origine du côté de rang k.

En effet, soient P et P' deux polygones funiculaires quelconques du système; p et p' leurs pôles; S_i l'intersection des deux côtés de rang i, et S_k l'intersection des deux côtés de rang k; enfin m l'intersection des côtés de rang i et k dans le polygone P et m' l'intersection des côtés de rangs i et k dans le polygone P'; m et m' seront deux points quelconques du lieu et ils seront à distance finie, si, a_i et a_k étant distincts comme le suppose l'énoncé, la droite indéfinie pp' ne passe ni par a_i ni par a_k.

Considérons les triangles pa_ia_k, mS_iS_k; le côté pa_i est parallèle à mS_i et le côté pa_k parallèle à mS_k. Si, les bases a_ia_k, S_iS_k restant fixes, les sommets p et m se déplacent de manière que les côtés d'abord parallèles conservent leur parallélisme, $p'a_ia_k$ et $m'S_iS_k$ seront deux autres positions correspondantes des triangles variables. Mais le déplacement pp' du sommet du premier

Fig. 6.



étant parallèle à la base S_iS_k du second (n° 6), il faut (n° 4) que le déplacement mm' du sommet du second soit parallèle à la base a_ia_k du premier. Ainsi la droite

qui joint deux points quelconques m et m' du lieu est parallèle à $a_i a_k$; donc tout point m du lieu est sur la droite λ menée par l'un d'eux m' parallèlement à $a_i a_k$. Inversement tout point μ de cette droite λ appartient au lieu; car, si l'on désigne par D une droite quelconque passant par μ et distincte de λ, et si l'on considère un polygone funiculaire du système ayant cette droite pour côté de rang i et un pôle ϖ différent de a_i, le côté de rang k dans ce polygone coupera la droite D en un point appartenant au lieu et par conséquent situé sur λ; or μ est le seul point commun aux droites D et λ; donc μ appartient au lieu.

9. On dit que le polygone des vecteurs d'un système de forces F_1, F_2, ..., F_n est *fermé* lorsque son origine a_1 et son extrémité a_{n+1} coïncident.

Un polygone funiculaire est dit *fermé* lorsque le premier côté $\omega\alpha_1$ et le dernier $\alpha_n\varphi$ coïncident avec la droite $\alpha_1\alpha_n$ qui joint le premier au dernier sommet.

Quand le polygone des vecteurs d'un système de forces est ouvert, on peut rencontrer parmi les polygones funiculaires du système les trois types : polygone fermé, ou polygone ouvert et ayant le premier et le dernier côté soit parallèles, soit concourants. Un exemple suffit pour mettre le fait hors de doute. Que l'on considère deux forces concourantes F_1 et F_2, si l'on prend le pôle hors de la droite $a_1 a_3$ qui joint l'origine à l'extrémité du polygone $a_1 a_2 a_3$ des vecteurs, on a évidemment un polygone funiculaire ouvert dont le premier et le dernier côté sont concourants; si l'on place au contraire le pôle sur $a_1 a_3$, le premier et le dernier côté du polygone funiculaire seront coïncidants ou parallèles suivant qu'on fera ou non passer le premier côté par le point de concours des deux forces.

Mais, *quand le polygone des vecteurs d'un système de forces* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *est fermé, si un polygone funiculaire du système est fermé, tous les polygones funiculaires du système sont fermés.*

En effet, si le polygone des vecteurs $a_1 a_2 \ldots a_{n+1}$ est fermé, c'est que a_{n+1} coïncide avec a_1; a_1 et a_n sont donc deux points distincts et $a_1 a_n$ est parallèle à F_n. Or, le polygone des vecteurs étant fermé, dans tout polygone funiculaire du système le dernier côté $\alpha_n \varphi$ aura la même direction que le premier $\omega\alpha_1$ et, pour qu'un tel polygone funiculaire soit fermé, il faut et il suffit que le premier côté $\omega\alpha_1$ et l'avant-dernier $\alpha_{n-1}\alpha_n$, c'est-à-dire le $n^{\text{ième}}$, concourent sur F_n. Mais, si cela a lieu pour l'un des polygones funiculaires, la droite F_n, qui est, avons-nous dit, parallèle à $a_1 a_n$, sera (n° 34) le lieu des points de rencontre du premier et du $n^{\text{ième}}$ côté des divers polygones funiculaires du système; tous ces polygones sont donc fermés.

Il suit de là que, *si le polygone des vecteurs d'un système de forces est fermé et si l'un des polygones funiculaires du système est ouvert, tous les polygones funiculaires du système seront ouverts.*

Observons encore que, *dans le cas particulier d'un système de forces concourantes, si le polygone des vecteurs est fermé, tous les polygones funiculaires sont fermés.* En effet, il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que la chose a lieu pour un polygone funiculaire du système. Or, si l'on fait passer le premier côté d'un polygone funiculaire par le point de concours des forces, ce polygone se réduit évidemment à la droite menée par ce point de concours parallèlement au premier rayon polaire.

10. Revenons maintenant au théorème du n° 8.

Nous avons supposé a_i et a_k distincts; car, *lorsque* a_i *et* a_k *se confondent,* la direction $a_i a_k$ n'est plus déterminée et l'énoncé n'a plus de sens. Mais *quel est alors le lieu des points de rencontre des côtés de rangs i et k?*

Considérons le système partiel formé par les forces F_i, F_{i+1}, ..., F_{k-1}; la ligne brisée $a_i a_{i+1} \ldots a_k$ est le polygone des vecteurs de ce système partiel, et, si $\omega\alpha_1 \ldots \alpha_n \varphi$ est un polygone funiculaire du système total $F_1 \ldots F_n$, $\alpha_{i-1}\alpha_i \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k$ sera un polygone funiculaire du système partiel $F_i F_{i+1} \ldots F_{k-1}$. Dans notre hypothèse le polygone des vecteurs $a_i a_{i+1} \ldots a_k$ est fermé, puisque a_i et a_k se confondent; donc, si l'on considère tous les polygones funiculaires du système, *les côtés* $\alpha_{i-1}\alpha_i$, et $\alpha_{k-1}\alpha_k$ *seront soit toujours parallèles et distincts, soit toujours confondus.* Le tracé d'un polygone funiculaire d'essai montrera quel est celui des deux cas dans lequel on se trouve.

Dans le premier cas, le lieu est évidemment la droite de l'infini du plan. Dans le second cas, tout point m du plan appartient au lieu; car, si l'on construit un polygone funiculaire du système en faisant passer son côté $\alpha_{i-1}\alpha_i$ de rang i par m, le côté $\alpha_{k-1}\alpha_k$ de rang k, coïncidant avec $\alpha_{i-1}\alpha_i$, passera aussi par m.

Lieu des poles des polygones funiculaires passant par deux points donnés.

11. *Si, parmi les polygones funiculaires d'un système de forces, on considère seulement ceux dont deux côtés de rangs assignés i et k passent respectivement par deux points donnés* I *et* K, *le lieu des pôles de ces polygones est une ligne droite parallèle à* IK.

Cherchons un point a du lieu qui soit situé sur une

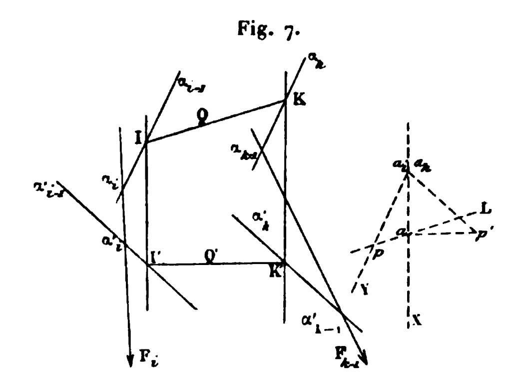
droite déterminée a_kY et menée d'ailleurs à volonté par le point a_k.

Supposons qu'on ait déjà tracé un polygone funiculaire quelconque P′ du système de forces considéré

$$(F_1 \ldots F_n;\ a_1 \ldots a_{n+1}),$$

et soit p' son pôle. Désignons par X une droite qui n'est autre que $a_i a_k$ lorsque les points a_i et a_k sont distincts, mais qui, si a_i et a_k sont confondus, est une droite menée à volonté par a_i. Traçons des parallèles à X par les points I et K jusqu'à leurs rencontres respectives I′ et K′ avec les côtés $\alpha'_{i-1}\alpha'_i$, $\alpha'_{k-1}\alpha'_k$ de rangs i et k dans le polygone funiculaire P′; enfin, par p', menons la parallèle à I′K′ et prenons son intersection a avec X. Soient f_1 et f_2 deux forces ayant, la première pour vecteur $a_i a$ et pour ligne d'action II′, la seconde pour vecteur $a a_k$ et pour ligne d'action KK′ et considérons le système de forces $(f_1 F_i F_{i+1} \ldots F_{k-1} f_2;\ a a_i \ldots a_k a)$. Le polygone Q′I′$\alpha'_i \ldots \alpha'_{k-1}$K′Q′ est un polygone funiculaire,

Fig. 7.



de pôle p', pour ce système de forces, et comme il est fermé ainsi que le polygone des vecteurs, tout autre polygone funiculaire du même système de forces sera

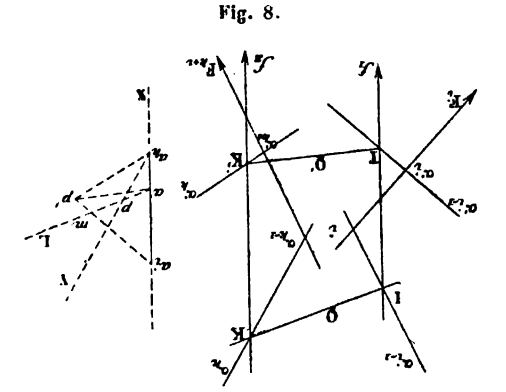
fermé; donc, en particulier, celui P_1 de ces polygones qui, ayant pour pôle p, aurait son premier côté passant par I. Mais les côtés de ce polygone P_1, autres que le premier et le dernier, seraient précisément les côtés $\alpha_{i-1}\alpha_i, \ldots, \alpha_{k-1}\alpha_k$ du polygone P; donc, puisque P_1 doit être fermé, son premier et son dernier côté se confondent avec IK; par suite, pa est parallèle à IK, en sorte qu'on obtient le point p en menant par le point connu a la parallèle à IK et prenant l'intersection de cette droite avec a_kY.

Ainsi tout point p du lieu se trouve sur la droite L menée par le point a parallèlement à IK.

D'ailleurs, tout point m de cette droite appartient au lieu; car, puisque, en vertu du raisonnement ci-dessus, il y a, sur chaque droite issue de a_k, un seul point du lieu, le point du lieu qui est sur $a_k m$, devant en même temps appartenir à L, coïncide avec m.

En définitive, le lieu cherché est une droite parallèle à IK et passant par un point a qu'on détermine par la règle suivante :

Fig. 8.



Tracez un polygone funiculaire quelconque P′ *du système de forces proposé* (s'il s'en trouve un déjà

tracé sur la figure, il convient évidemment d'en profiter); *prenez les points* I' *et* K' *où les côtés de rangs* i *et* k *rencontrent respectivement les parallèles menées par* I *et* K *à une droite* X, *qui est la droite* $a_i a_k$ *si* a_i *et* a_k *sont distincts, ou une droite menée à volonté par* a_i *si* a_i *et* a_k *se confondent; enfin, par le pôle du polygone auxiliaire* P' *menez la parallèle à* I'K'; *cette parallèle rencontrera la droite* X *au point cherché* a.

La *fig.* 8 est relative au cas où les points a_i et a_k sont distincts; la *fig.* 7 se rapporte au cas où ces points sont confondus, alors les côtés $\alpha'_{i-1}\alpha'_i$, $\alpha'_{k-1}\alpha'_k$ de rangs i et k dans le polygone auxiliaire P' ont la même direction $p'a_i$. Nous avons supposé ces deux côtés distincts; s'ils se confondent, la droite I'K' se confond avec eux, et la droite $p'a$, devenant $p'a_i$, le point a ne diffère pas de a_i; dans ce cas, le lieu est donc la parallèle à IK, menée par les points confondus a_i et a_k.

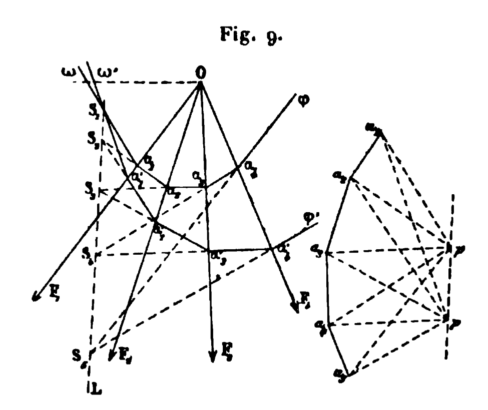
Propriétés spéciales des polygones funiculaires relatifs a un système de forces concourantes ou parallèles.

12. *Deux polygones funiculaires quelconques* P *et* P' *d'un même système de forces concourantes sont deux figures homologiques;* en d'autres termes, si Σ est une figure quelconque dont le polygone P fait partie, et si l'on construit la figure Σ' homologique de Σ en prenant pour centre d'homologie le point de concours O des forces et pour axe d'homologie l'axe commun L (n° 6) aux deux polygones P et P', le polygone P' sera la partie de Σ' qui est l'homologue de P (*fig.* 9).

En effet, prenons respectivement sur les deux premiers côtés $\omega\alpha_1$ et $\omega\alpha'_1$ des polygones funiculaires P et

P′ deux points ω et ω' en ligne droite avec le point O. Puis avec le centre d'homologie O, l'axe d'homologie L et le couple (ω, ω') de points homologues, construisons la figure Σ' homologique de Σ; l'homologue du premier côté $\omega\alpha_1$ de P sera le premier côté $\omega'\alpha'_1$ de P′, puisque

Fig. 9.



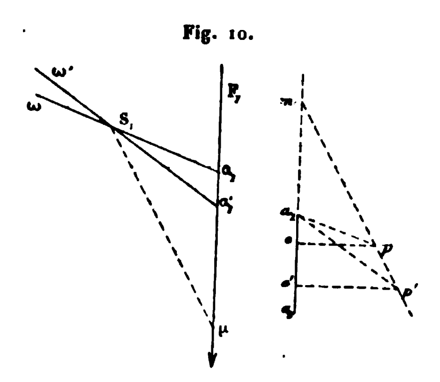
$\omega'\alpha'_1$ passe par ω' homologue de ω et coupe l'axe L au même point S_1 que $\omega\alpha_1$. D'ailleurs l'homologue du sommet α_1 de P devant être à la fois sur $O\alpha_1$ et sur $\omega'\alpha'_1$ sera précisément le sommet α'_1 de P′. Dès lors on voit de même que $\alpha'_1\alpha'_2$ est l'homologue de $\alpha_1\alpha_2$ et que α_2 est l'homologue de α'_2; et ainsi de suite.

13. Lorsque les deux polygones funiculaires P et P′ sont relatifs à des forces parallèles, le centre d'homologie passe à l'infini dans la direction des forces. Il est d'ailleurs aisé de voir que le rapport d'homologie est alors égal en grandeur et en signe au rapport des distances polaires ep, $e'p'$ (*fig.* 10).

En effet, soit m l'intersection de $a_1 a_2$ et de pp', S_1 l'intersection de $\omega\alpha_1$ et de $\omega'\alpha'_1$, enfin μ le point où $\alpha_1\alpha'_1$ coupe l'axe commun aux deux polygones, c'est-

à-dire la parallèle menée par S_1 à pp'; les deux triangles pa_1p', $\alpha_1 S_1 \alpha'_1$ se trouvent dans les conditions du n° 3, les côtés a_1p et $S_1\alpha_1$ sont parallèles, ainsi que les côtés a_1p' et $S_1\alpha'_1$, et la droite a_1m est menée par le sommet

Fig. 10.



du premier parallèlement à la base $\alpha_1\alpha'_1$ du second, tandis que la droite $S_1\mu$ est menée par le sommet du second parallèlement à la base pp' du premier; on a donc, en grandeur et en signe,

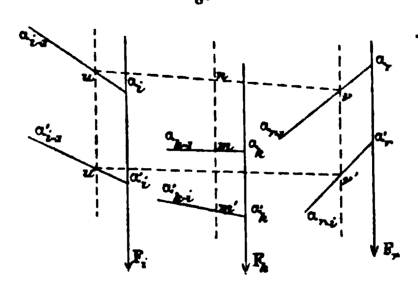
$$\frac{\mu\alpha'_1}{\mu\alpha_1} = \frac{mp}{mp'} = \frac{ep}{ep'};$$

ce qui démontre le fait énoncé, puisque la droite $S_1\mu$ étant l'axe d'homologie et (α_1, α'_1) étant un couple de points homologues, le premier des rapports ci-dessus exprime le rapport d'homologie. Ainsi :

Deux polygones funiculaires quelconques P *et* P' *d'un même système de forces parallèles sont deux figures homologiques, dont les rayons homologiques sont parallèles aux lignes d'action des forces, dont l'axe d'homologie est l'axe commun aux deux polygones et dont le rapport d'homologie est égal au rap-*

port inverse des distances polaires. Ce rapport est d'ailleurs égal à celui des ordonnées de deux points homologues quelconques m et m' des deux polygones,

Fig. 11.



les ordonnées nm, n'm' étant parallèles aux forces et comptées respectivement à partir de deux droites homologues quelconques uv, et u'v' des deux figures (*fig.* 11).

Polygone funiculaire passant par trois points donnés.

14. *Étant donnés trois points quelconques* I, H, K *dans le plan d'un système de forces*

$$(F_1 F_2 \ldots F_n;\ a_1 a_2 \ldots a_{n+1}),$$

on demande de tracer le polygone funiculaire P *dont le côté de rang i passerait par* I, *le côté de rang h par* H *et le côté de rang k par* K.

Il suffit évidemment de trouver le pôle p du polygone demandé P.

Or ce pôle p appartient au lieu des pôles des polygones funiculaires dont le côté de rang i passerait par I et le côté de rang h par H; il appartient aussi au lieu des pôles des polygones funiculaires dont le côté de

rang h passerait par H et le côté de rang k par K; on sait (n° 11) construire ces deux lieux qui sont des droites respectivement parallèles à IH et HK; l'intersection de ces deux droites sera le point cherché p.

On pourrait d'ailleurs à l'un de ces deux lieux substituer celui des pôles des polygones funiculaires dont le côté de rang i passe par I et le côté de rang k par K, et obtenir de la sorte une vérification.

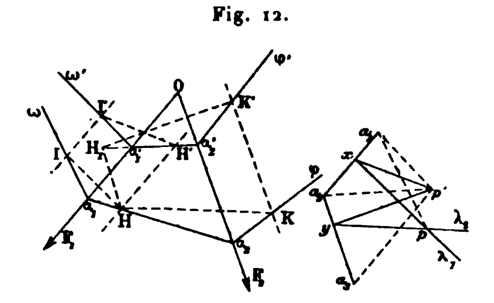
Telle est la méthode générale. Mais, si les forces sont concourantes ou parallèles, il vaut mieux recourir aux propriétés spéciales des n°s 12 et 13. On a alors par le point de concours ou par la direction des forces le centre d'homologie ou la direction homologique des polygones funiculaires du système. Donc, en prenant les intersections respectives des rayons homologiques des points I, H, K et des côtés de rangs i, h, k dans un premier polygone d'essai P', on aura immédiatement les homologues I', H', K' des points I, H, K du polygone demandé P; on pourra alors trouver tous les côtés de ce polygone P, même indépendamment les uns des autres, à l'aide des tracés indiqués au n° 7.

15. Tout cela est si facile qu'un exemple suffira. Nous choisirons à cet effet le système de deux forces concourantes (F_1, F_2; $a_1\,a_2\,a_3$) auquel nous appliquerons successivement les deux méthodes; le premier côté devra passer par I, le deuxième par H et le troisième par K.

La *fig.* 12 est relative à la première méthode; $\omega'\alpha'\alpha'_1\varphi'$ est un polygone d'essai dont p' est le pôle. En menant II' et HH' parallèles à $a_1\,a_2$, puis par p' la parallèle $p'x$ à I'H' et enfin par x la parallèle à I'H', on a (n° 11) le lieu λ_1 des pôles des polygones funiculaires dont le premier côté passe par I et le second par H. De même en

menant HH_1 et KK' parallèles à a_2a_3, puis par p' la parallèle $p'y$ à H'_1K' et enfin par y la parallèle à HK, on a le lieu λ_2 des pôles des polygones funiculaires dont le deuxième côté passe par H et le troisième par K.

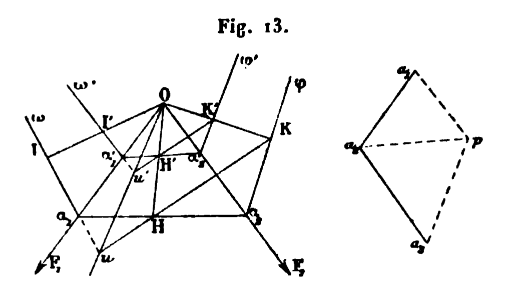
Fig. 12.



Le point p commun à λ_1 et λ_2 sera le pôle du polygone cherché P; son premier côté sera la parallèle $\omega\alpha_1$ à pa_1 menée par I; puis, α_1H et α_2K seront les côtés suivants; comme vérification, ces côtés doivent être respectivement parallèles aux rayons polaires pa_2 et pa_3 que nous n'avons pas tracés pour ne pas compliquer inutilement la figure.

La *fig.* 13 est relative à la seconde méthode; $\omega'\alpha'_1\alpha'_2\varphi'$

Fig. 13.



étant toujours un polygone d'essai dont le pôle p' est arbitraire, on prendra les intersections I', H', K' de ses côtés successifs avec les rayons homologiques OI, OH,

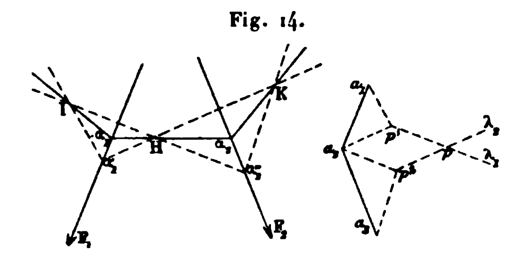
OK, et il restera, pour avoir le polygone demandé P, à construire la figure homologique de $\omega'\alpha'_1\alpha'_2\varphi'$.

L'homologue u du point u' où $\omega'\alpha'_1$ coupe H'K' sera sur Ou' et sur HK; en le joignant au point I, on aura la droite homologue de I$'u'$, c'est-à-dire le premier côté ωIα_1 du polygone P dont le deuxième côté sera α_1Hα_2 et le troisième α_2Kφ.

16. L'une et l'autre construction peuvent être notablement abrégées par un choix convenable du polygone d'essai P', si un tel polygone ne se trouve pas tracé déjà pour d'autres besoins.

Reprenons à ce point de vue la première méthode. En prolongeant KH (*fig.* 14) jusqu'à sa rencontre α'_1 avec

Fig. 14.

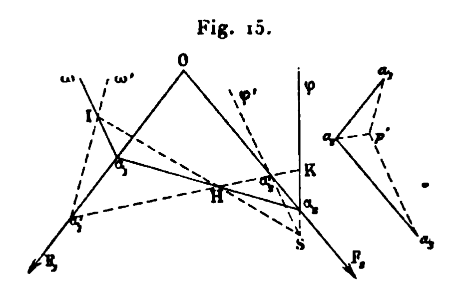


F$_1$, on peut considérer Iα'_1 et α'_1H comme le premier et le second côté d'un polygone funiculaire dont le premier côté passerait par I et le second par H; son pôle p' s'obtiendra en menant a_1p' et a_2p' respectivement parallèles à Iα'_1 et à HK, et la parallèle λ_1 menée par p' à IH sera le lieu des pôles des polygones funiculaires ayant leur premier côté passant par I et leur second par H. De même, en prolongeant IH jusqu'à sa rencontre α''_2 avec F$_2$, on peut considérer Hα''_2 et α''_2K comme le deuxième et le troisième côté d'un polygone funiculaire dont le deuxième côté passerait par H et le troisième par

K; son pôle p'' s'obtiendra en menant a_2p'' et a_3p'' respectivement parallèles à IH et à α''_2K, et la parallèle λ_2 menée par p'' à HK sera le lieu des pôles des polygones funiculaires ayant leur deuxième côté passant par H et le troisième par K. Donc l'intersection de λ_1 et de λ_2, c'est-à-dire le sommet p opposé à a_2 dans le parallélogramme $a_2p'pp''$ sera le pôle du polygone cherché P. On aura le deuxième côté $\alpha_1\alpha_2$ en menant par H la parallèle à pa_2; puis Iα_1 et α_2K seront le premier et le troisième.

Reprenons de même la seconde méthode : En prolongeant KH jusqu'à sa rencontre α'_1 avec F_1, Iα'_1 et

Fig. 15.



α'_1Hα'_2 seront les deux premiers côtés d'un polygone funiculaire dont le premier côté passe par I et le second par H; son pôle p' s'obtiendra en menant a_1p et a_2p respectivement parallèles à Iα'_1 et à HK, et l'on aura le troisième côté $\alpha'_2\varphi'$ en menant par α'_2 la parallèle à $p'a_3$; mais le polygone $\omega'\alpha'_1\alpha'_2\varphi'$ et le polygone cherché P ont évidemment pour axe d'homologie la droite IH qui est leur axe commun; donc, il suffira de prolonger $\varphi'\alpha'_2$ jusqu'à sa rencontre S avec IH et de joindre SK pour avoir le dernier côté $\alpha_2\varphi$ du polygone P; le second côté sera ensuite α_2Hα_1 et le premier α_1I (*fig.* 15).

La construction que nous trouvons ainsi par la considération des figures homologiques aussi bien que la

précédente sont remarquables par leur élégante simplicité.

Polygone funiculaire passant par deux points donnés et ayant une distance polaire donnée.

17. Après les détails dans lesquels nous venons d'entrer, il suffira de quelques mots sur ce nouveau problème :

Étant donnés deux points quelconques I *et* H *dans le plan d'un système de forces*

$$(F_1 F_2 \ldots F_n;\ a_1 a_2 \ldots a_{n+1}),$$

on demande de tracer un polygone funiculaire P *dont le côté de rang i passe par* I, *le côté de rang h par* H *et dont le pôle p soit à une distance donnée δ de la droite qui, dans ce polygone des vecteurs, joint le point a_i au point a_h.*

Le pôle inconnu p doit être d'abord sur l'une des deux parallèles à $a_i a_h$ situées de part et d'autre et à la distance δ de cette droite. Il doit être en outre sur la droite lieu des pôles des polygones funiculaires dont les côtés de rangs i et h passent respectivement par I et H. Cette droite coupe les deux premières en deux points p et p_1. Il y a donc deux solutions; la solution serait unique si l'on donnait, outre la valeur absolue δ de la distance polaire, le sens de cette distance.

Si les forces concourent en un même point O, on construira un polygone d'essai P′ en prenant un pôle p' à la distance δ de $a_i a_h$, portée d'ailleurs du côté convenable si le sens de la distance est donné. Les rayons homologiques OI, OH fourniront par leurs rencontres respectives avec les côtés de rangs i et h du po-

lygone P′ les points I′ et H′ homologiques de I et H; l'axe d'homologie des polygones P et P′ s'obtiendra en menant par le point de rencontre S de IH et I′H′ la parallèle SL à pp', c'est-à-dire la parallèle à $a_i a_k$; on aura donc plus de données qu'il n'en faut pour construire le polygone P homologique de P′.

18. La solution par les figures homologiques devient d'une extrême simplicité dans le *cas où les forces sont parallèles*. Soit, pour fixer les idées, le système de trois forces parallèles ($F_1 F_2 F_3$; $a_1 a_2 a_3 a_4$) et supposons qu'on veuille que le premier côté du polygone funiculaire

Fig. 16.

demandé P passe par I et le dernier côté par H. On construira un polygone funiculaire d'essai P′ ou $\omega' \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \varphi'$ à l'aide d'un pôle p' qui soit à la distance donnée δ de $a_1 a_4$ et dans le sens voulu ; puis on mènera par I et H des parallèles aux forces jusqu'aux points d'intersection de ces rayons homologiques avec le premier côté $\omega' \alpha'_1$ et le dernier côté $\alpha'_3 \varphi$ du polygone P′; ces points d'intersection I′ et H′ seront les homologues de I et K. Mais les polygones P et P′ ayant leur rapport

d'homologie égal à l'unité (n° 13) puisque leurs distances polaires sont égales et de même sens, les ordonnées correspondantes comptées respectivement à partir des droites homologues IH, I'H' seront égales et de même signe. Il suffira donc, pour avoir le polygone I', de prendre $\beta_1\alpha_1$, $\beta_2\alpha_2$, $\beta_3\alpha_3$ respectivement égales à $\beta'_1\alpha'_1$, $\beta'_2\alpha'_2$, $\beta'_3\alpha'_3$ et de même sens. Des vérifications simples peuvent d'ailleurs être fournies par les rencontres telles que u', des côtés du polygone P' avec I'H'; les côtés homologues du polygone P devront rencontrer IH en des points homologues, c'est-à-dire situés avec les premiers sur une parallèle aux forces.

REMARQUES SUR LA DÉTERMINATION DES FOYERS D'UNE CONIQUE;

PAR M. E. GOURSAT.

Soit

$$(1)\quad f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

l'équation d'une conique rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, les coefficients a, b, c, d, e, f étant réels. Les foyers de cette conique sont les points d'intersection des deux courbes

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} X = {} & (b^2 - ac)(x^2 - y^2) + 2(be - cd)x \\ & + 2(ae - bd)y + e^2 - d^2 + f(a - c) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} Y = {} & 2(b^2 - ac)xy + 2(bd - ae)x \\ & + 2(be - cd)y + 2(bf - de) = 0; \end{aligned} \right.$$

pour trouver les points réels d'intersection de ces deux courbes, on peut procéder comme il suit.

Multiplions l'équation (3) par $i = \sqrt{-1}$, et ajoutons; en posant

$$z = x + iy,$$
$$A = b^2 - ac,$$
$$B = be - cd + i(bd - ae),$$
$$C = e^2 - d^2 + f(a - c) + 2i(bf - de),$$

il vient

$$(4) \qquad X + iY = Az^2 + 2Bz + C = 0.$$

La recherche des racines de l'équation (4) revient précisément à la recherche des systèmes de solutions réelles communes aux équations (2) et (3) et, inversement, tout point d'intersection réel de ces deux courbes fournit une racine de l'équation (4). Nous sommes conduits, par conséquent, à la conclusion suivante :

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) *les coordonnées des deux foyers réels de la conique représentée par l'équation* (1); *si l'on pose*

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2,$$

les deux quantités imaginaires z_1 *et* z_2 *sont les racines de l'équation* (4).

Supposons d'abord $b^2 - ac$ différent de zéro; en résolvant l'équation (4), on trouve

$$(5) \qquad z = \frac{cd - be + i(ae - bd) + \sqrt{\Delta}\sqrt{a - c + 2ib}}{b^2 - ac},$$

où Δ désigne le discriminant

$$\Delta = acf + 2bde - ae^2 - cd^2 - fb^2.$$

Tout revient donc à extraire la racine carrée de la quantité imaginaire $a - c + 2ib$. Une fois les foyers réels connus, les foyers imaginaires se déterminent sans difficulté.

Si $b^2 - ac$ est nul, on trouve pour la valeur de z correspondant au foyer unique une fonction rationnelle des coordonnées.

Il est à remarquer que la méthode précédente ne diffère pas au fond de la méthode générale employée par Salmon pour résoudre les équations (2) et (3), et qu'elle conduit précisément aux mêmes calculs. Si celle-ci présente quelque avantage, c'est qu'elle ramène immédiatement la question à une question traitée dans tous les cours d'Algèbre, à propos de la racine carrée d'une quantité imaginaire.

Il est aisé d'expliquer le résultat précédent et de l'étendre aux courbes algébriques planes de degré quelconque. Soit

$$\varphi(m, p) = 0 \tag{6}$$

l'équation tangentielle d'une courbe algébrique plane réelle C, dans un système d'axes rectangulaires, c'est-à-dire la condition pour que la droite

$$y = mx + p \tag{7}$$

soit tangente à cette courbe. Soient x_1, y_1 les coordonnées d'un foyer réel de cette courbe; la droite

$$y = ix + y_1 - ix_1$$

sera tangente à la courbe C et l'on aura, par conséquent,

$$\varphi(i, y_1 - ix_1) = 0;$$

en séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on pourra écrire

$$\varphi(i, y_1 - ix_1) = X + iY,$$

X et Y désignant des fonctions entières à coefficients réels de x_1, y_1. Mais, puisque x_1 et y_1 sont supposés

réels, on aura à la fois

$$X = 0, \qquad Y = 0,$$

et les foyers réels seront précisément les points d'intersection réels de ces deux courbes. Or, si l'on pose

$$z = x_1 + iy_1,$$

la relation précédente peut s'écrire

$$\varphi(i, -iz) = X + iY,$$

et la recherche des points réels communs à ces deux courbes revient précisément à résoudre l'équation à coefficients imaginaires

$$\varphi(i, -iz) = 0.$$

Ainsi, *pour avoir l'équation qui détermine les affixes des foyers réels de la courbe* C, *il suffit de remplacer m par i et p par — iz dans l'équation tangentielle* (6) *de cette courbe.*

Pour présenter une application de ce qui précède, considérons toutes les paraboles inscrites dans un triangle. Leur équation tangentielle contiendra un paramètre arbitraire λ au premier degré, et l'équation qui détermine le foyer de l'une de ces paraboles sera de la forme

$$(A\lambda + B)z + C\lambda + D = 0$$

ou

$$z = -\frac{C\lambda + D}{A\lambda + B}.$$

Pour avoir le lieu décrit par ce foyer, il faudra faire varier λ par valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, c'est-à-dire faire décrire à λ l'axe des quantités réelles. Mais la formule précédente fait correspondre à une droite une circonférence; on retrouve ainsi le théorème connu.

SUR UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DE L'ATTRACTION;

PAR M. E. SARRAU,
Membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique.

Lorsque l'on considère l'attraction exercée, suivant la loi de Newton, par une masse sur un point, on a ce théorème :

Si le point est à l'intérieur de la masse, la fonction potentielle de cette masse sur ce point satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} + \frac{d^2 u}{d\beta^2} + \frac{d^2 u}{d\gamma^2} = -4\pi K,$$

en désignant par u la fonction potentielle, par α, β, γ *les coordonnées du point, et par* K *la densité de la masse en ce point.*

Poisson a établi, le premier, ce théorème en considérant d'abord l'attraction d'une sphère homogène (¹). D'autres géomètres, notamment Gauss (²) et M. Clausius (³), en ont donné des démonstrations directes, en ayant égard à la variation de la densité de la masse attirante (⁴). Ces démonstrations paraissent compliquées, parce qu'elles comprennent des propositions de Calcul intégral intéressantes en elles-mêmes, et d'ailleurs in-

(1) *Bulletin de la Société philomathique*, t. III, p. 368.

(2) *Œuvres*, t. V, p. 197, et *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 273.

(3) *De la fonction potentielle et du potentiel*, traduit de l'allemand par F. Folie. Paris, Gauthier-Villars; 1870, p. 44.

(4) On peut consulter, sur le même sujet, la *Théorie du potentiel*, par M. Émile Mathieu. Paris, Gauthier-Villars; 1885.

dépendantes du sujet. Il y a avantage à isoler ces propositions, et la démonstration du théorème de Poisson découle ainsi très simplement de quelques théorèmes généraux qui sont susceptibles d'un grand nombre d'autres applications.

I. — Théorèmes préliminaires.

1. Théorème principal. — *Soit* $F(x, y, z)$ *une fonction des coordonnées* (x, y, z), *finie, continue et bien déterminée dans toute l'étendue d'un volume* v *limité par une surface* σ; *en désignant par*

dv un élément du volume v;
$d\sigma$ un élément de la surface σ;
a le cosinus de l'angle que la normale à l'élément $d\sigma$, extérieure au volume v, fait avec l'axe OX;

on a

$$\int \frac{dF}{dx}\, dv = \int a F\, d\sigma, \tag{1}$$

l'intégrale du premier membre s'étendant à tous les éléments du volume v, et l'intégrale du second membre s'étendant à tous les éléments de la surface σ.

En effet, à un système de valeurs (y, z) correspondent, sur la surface σ, certaines valeurs de x; le nombre de ces valeurs est toujours pair, puisqu'une parallèle à l'axe des x, entrant dans le volume v un certain nombre de fois, en sort le même nombre de fois.

Supposons qu'un point décrivant cette parallèle, de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, entre dans le volume v pour $x = x_1$ et en sorte pour $x = x_2$, y entre pour $x = x_3$ et en sorte pour $x = x_4$, et ainsi de suite. Soient $F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots$ les valeurs de F pour ces valeurs particulières de x.

En prenant pour l'élément dv le parallélépipède $dx\,dy\,dz$, on a

$$\int \frac{dF}{dx}\,dv = \int\!\!\int\!\!\int \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,dz,$$

et, en intégrant par rapport à la variable x,

$$\begin{aligned}\int\!\!\int\!\!\int \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,dz \\ = \int\!\!\int [(F_2 - F_1) + (F_4 - F_3) + \ldots]\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Or, si l'on désigne par a_1, a_2, a_3, a_4, ... les valeurs de a aux points dont les abscisses sont x_1, x_2, x_3, x_4, ..., et par $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$, ... les éléments superficiels en ces points, qui ont pour projection $dy\,dz$ sur le plan YOZ, on a évidemment

$$-a_1\,d\sigma_1 = a_2\,d\sigma_2 = -a_3\,d\sigma_3 = a_4\,d\sigma_4 = \ldots = dy\,dz.$$

On peut, par suite, écrire

$$\begin{aligned}\int\!\!\int\!\!\int \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,dz, \\ = \int [a_2 F_2\,d\sigma_2 + a_1 F_1\,d\sigma_1 + a_4 F_4\,d\sigma_4 + \ldots],\end{aligned}$$

c'est-à-dire, conformément à l'énoncé,

$$\int\!\!\int\!\!\int \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,dz = \int a F\,d\sigma.$$

2. Corollaire I. — Si, dans la relation (1), on suppose $F = 1$, on trouve

$$(2) \qquad \int a\,d\sigma = 0.$$

Donc, *l'intégrale* $\int a\,d\sigma$ *étendue à toute la surface d'un espace limité est égale à zéro.*

3. Corollaire II. — En supposant $F = x$, il vient

$$(3) \qquad \int dv = \int ax\, d\sigma.$$

Donc, *l'intégrale* $\int ax\, d\sigma$ *étendue à la surface d'un espace limité est égale au volume de cet espace.*

4. Corollaire III. — Soient a, b, c les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$, extérieure au volume v, et F, G, H des fonctions de x, y, z finies, continues et bien déterminées dans l'étendue du volume v; on a les trois équations

$$\int \frac{dF}{dx} dv = \int aF\, d\sigma,$$
$$\int \frac{dG}{dy} dv = \int bG\, d\sigma,$$
$$\int \frac{dH}{dz} dv = \int cH\, d\sigma,$$

et, par suite, en ajoutant membre à membre (¹),

$$(4) \qquad \int \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) dv = \int (aF + bG + cH)\, d\sigma.$$

5. *Formule de Green.* — Si l'on fait dans l'équation (4)

$$F = \rho \frac{d\varphi}{dx}, \qquad G = \rho \frac{d\varphi}{dy}, \qquad H = \rho \frac{d\varphi}{dz},$$

(¹) Cette formule est fréquemment utilisée en Physique mathématique; Laplace s'en est servi, le premier, dans la *Théorie de la capillarité*.

ρ et φ étant des fonctions de (x, y, z), il vient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \rho\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)dv \\ &\quad+\int\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\varphi}{dz}\right)dv \\ &=\int \rho\left(a\frac{d\varphi}{dx}+b\frac{d\varphi}{dy}+c\frac{d\varphi}{dz}\right)d\sigma. \end{aligned}\right.$$

L'expression

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

a été appelée par Lamé *paramètre différentiel du second ordre de la fonction* φ; nous la désignerons par $\Delta\varphi$, en posant symboliquement

$$\Delta=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}.$$

Quant au trinôme qui figure dans l'intégrale du second membre, on peut lui assigner une signification très simple. En effet, on a, en général,

$$d\varphi=\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz.$$

Supposons qu'à partir du point (x, y, z) de la surface v, et sur la normale extérieure au volume v, on porte une longueur infiniment petite dn; les projections de cette longueur sur les axes sont

$$dx=a\,dn,\qquad dy=b\,dn,\qquad dz=c\,dn,$$

et la valeur correspondante de $d\varphi$ est

$$d\varphi=\left(a\frac{d\varphi}{dx}+b\frac{d\varphi}{dy}+c\frac{d\varphi}{dz}\right)dn,$$

de sorte que l'on peut écrire

$$a\frac{d\varphi}{dx}+b\frac{d\varphi}{dy}+c\frac{d\varphi}{dz}=\frac{d\varphi}{dn},$$

$d\varphi$ désignant la dérivée de la fonction φ suivant la normale à la surface σ.

En résumé, si l'on pose

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + \dfrac{d^2\varphi}{dy^2} + \dfrac{d^2\varphi}{dz^2}, \\ \lambda = \dfrac{d\rho}{dx}\dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\rho}{dy}\dfrac{d\varphi}{dy} + \dfrac{d\rho}{dz}\dfrac{d\varphi}{dz}, \\ \dfrac{d\varphi}{dn} = a\dfrac{d\varphi}{dx} + b\dfrac{d\varphi}{dy} + c\dfrac{d\varphi}{dz}, \end{cases}$$

l'équation (5) devient

$$(7)\qquad \int \rho\,\Delta\varphi\,dv + \int \lambda\,dv = \int \rho\,\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma.$$

Telle est la formule de Green ([1]); elle exige que les quantités $\rho\dfrac{d\varphi}{dx}$, $\rho\dfrac{d\varphi}{dy}$, $\rho\dfrac{d\varphi}{dz}$ soient finies, continues et bien déterminées dans le volume v.

6. *Modification des formules dans le cas où le volume v renferme des infinis.* — Supposons que la fonction F de la formule fondamentale ait une valeur infinie en un point P(α, β, γ), dans l'intérieur du volume v.

Concevons une sphère σ' de rayon infiniment petit r', décrite du point P comme centre. On peut appliquer la formule (1) au volume compris entre les surfaces σ et σ',

---

([1]) *Essai d'application de l'Analyse mathématique à la théorie de l'Electricité et du Magnétisme* (Nottingham, 1828), réimprimé dans le *Journal de Crelle* (1850), et dans l'édition des *Œuvres* de Green. En fait, suivant la remarque de M. Émile Mathieu, la formule dite *de Green* a été employée dans différents cas par Fourier et Poisson, avant la publication du Mémoire de Green *Sur l'Électricité*. Duhamel et Lamé s'en sont servis, postérieurement, dans des *Recherches sur la distribution de la température dans les corps solides* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXII[e] Cahier; 1833, p. 69 et 204).

en étendant à ces deux surfaces l'intégration du second membre. Si donc on désigne par ω la valeur de l'intégrale $\int a\mathrm{F}\,d\sigma'$, relative à la sphère infiniment petite, c'est-à-dire la limite de cette intégrale lorsque r' décroît indéfiniment, la formule (1) est remplacée par la suivante :

$$(8) \qquad \int \frac{d\mathrm{F}}{dx}\,dv = \int a\mathrm{F}\,d\sigma + \omega,$$

et l'on aurait une somme de termes ω, si la fonction F admettait plusieurs infinis dans le volume v.

La formule (6) éprouve une modification analogue, lorsque l'une des fonctions ρ, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ devient infinie.

7. *Premier exemple.* — Désignant par r la distance du point variable (x, y, z) à un point fixe $\mathrm{P}(\alpha, \beta, \gamma)$, de sorte que

$$(9) \qquad r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (z-\gamma)^2,$$

et posant

$$(10) \qquad \varphi = \frac{1}{r},$$

faisons $\mathrm{F} = \rho\varphi$ dans la formule (1), ρ étant une fonction finie dans le volume v.

Si le point P est hors du volume v, la formule (1) est immédiatement applicable; mais, si ce point est dans ce volume, la formule peut se trouver modifiée, la fonction devenant infinie lorsque l'on attribue à x, y, z les valeurs α, β, γ.

Considérons l'intégrale

$$\omega = \int a\rho\varphi\,d\sigma',$$

relative à la sphère σ', de rayon infiniment petit r'.

Soit K la valeur de ρ au point P; on peut, dans l'intégration, remplacer ρ par K, et l'on a, sur la sphère,

$$\varphi = \frac{1}{r'}.$$

Par suite,

$$\omega = \frac{K}{r'}\int a\,d\sigma',$$

et cette valeur se réduit à zéro (n° 2).

La formule (1) s'applique donc, quelle que soit la position du point P, de sorte que, lorsque la fonction φ est définie par les formules (9) et (10), on a, dans tous les cas,

$$(11)\qquad \int \rho\frac{d\varphi}{dx}\,dv + \int \varphi\frac{d\rho}{dx}\,dv = \int a\rho\varphi\,d\sigma.$$

8. *Second exemple.* — Faisons maintenant $\varphi = \frac{1}{r}$ dans la formule (7). On a alors

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= -\frac{x-\alpha}{r^3}, & \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-\alpha)^2}{r^5},\\ \frac{d\varphi}{dy} &= -\frac{y-\beta}{r^3}, & \frac{d^2\varphi}{dy^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-\beta)^2}{r^5},\\ \frac{d\varphi}{dz} &= -\frac{z-\gamma}{r^3}, & \frac{d^2\varphi}{dz^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-\gamma)^2}{r^5}.\end{aligned}\right.$$

Les dérivées secondes satisfont à l'équation

$$(13)\qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

et les dérivées premières donnent, en ayant égard à la troisième des formules (6),

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{1}{r^2}\left(a\frac{x-\alpha}{r} + b\frac{y-\beta}{r} + c\frac{z-\gamma}{r}\right),$$

ou bien, en désignant par ε l'angle que la normale en un

point M de la surface σ, extérieure au volume v, fait avec le vecteur qui joint le point P au point M,

$$(14) \qquad \frac{d\varphi}{dn} = -\frac{\cos\varepsilon}{r^2}.$$

Cela posé et admettant que la fonction ρ reste finie dans le volume v, deux cas se présentent :

1° P *est extérieur à* v, r ne devient pas nul ; les dérivées de φ restent finies dans le volume de v, et la formule (7) devient, en y remplaçant, d'après la relation (13), $\Delta\varphi$ par zéro,

$$(15) \qquad \int \lambda \, dv = \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma.$$

2° P *est intérieur à* v ; on doit alors ajouter au second membre de l'équation (7) l'intégrale

$$\omega = \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma',$$

étendue à la surface d'une sphère décrite, du point P comme centre, avec un rayon infiniment petit r'.

On a, sur cette sphère,

$$\varepsilon = \pi, \qquad \cos\varepsilon = -1, \qquad r = r',$$

et, par suite, d'après la valeur (14),

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{1}{r'^2}.$$

On peut d'ailleurs, dans l'intégration, remplacer ρ par la valeur K de cette fonction au point P ; il en résulte

$$\omega = \frac{K}{r'^2} \int d\sigma' ;$$

mais l'intégrale $\int d\sigma'$ représente la surface totale de la

sphère σ', et cette surface est égale à $4\pi r'^2$; donc,

$$\omega = 4\pi K,$$

de sorte que l'équation (15) est remplacée par la suivante :

$$(16) \qquad \int \lambda\, dv = \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma + 4\pi K.$$

9. En particulier, soit $\rho = 1$; la deuxième formule (6) donne $\lambda = 0$, et en remplaçant $\frac{d\varphi}{dn}$ par sa valeur (14) dans les équations (15) et (16), on a ce théorème :

L'intégrale

$$\int \frac{\cos\varepsilon}{r^2} d\sigma,$$

étendue à toute la surface d'un espace limité, est nulle, ou égale à 4π, suivant que l'origine P *du vecteur r est extérieure ou intérieure à cet espace.*

II. — Théorème de Poisson.

10. *Composantes de l'attraction.* — Imaginons un espace limité rempli d'une matière continue et attirant un point matériel P. Soit M un point quelconque de cet espace; désignons par

α, β, γ les coordonnées du point P;
x, y, z les coordonnées du point M;
ρ la densité au point M;
dv un élément de volume renfermant le point M;
m la masse du point P;
r la distance du point P au point M.

La masse de l'élément dv est $\rho\, dv$, et la force attrac-

tive agissant sur le point P est, d'après la loi de Newton,

$$f\frac{m\rho\, dv}{r^2},$$

f désignant une constante. Les composantes de cette force sont

$$f\frac{m\rho(x-\alpha)\,dv}{r^3},\quad f\frac{m\rho(y-\beta)\,dv}{r^3},\quad f\frac{m\rho(z-\gamma)\,dv}{r^3}.$$

et l'on a, par suite, pour les composantes de l'attraction totale exercée sur le point P,

$$fm\int\frac{\rho(x-\alpha)}{r^3}\,dv,$$
$$fm\int\frac{\rho(y-\beta)}{r^3}\,dv,$$
$$fm\int\frac{\rho(z-\gamma)}{r^3}\,dv,$$

les intégrations s'étendant à tous les éléments dv du volume attirant. Dans ces sommations, la densité ρ est constante, ou fonction de (x, y, z) suivant que la masse comprise dans ce volume est ou n'est pas homogène.

Les expressions de ces composantes s'écrivent

$$fm\mathrm{X},\quad fm\mathrm{Y},\quad fm\mathrm{Z},$$

en posant

(17)
$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \int\frac{\rho(x-\alpha)}{r^3}\,dv,\\ \mathrm{Y} &= \int\frac{\rho(y-\beta)}{r^3}\,dv,\\ \mathrm{Z} &= \int\frac{\rho(z-\gamma)}{r^3}\,dv.\end{aligned}\right.$$

11. *Fonction potentielle.* — Green a donné le nom de *fonction potentielle* à l'intégrale

(18)
$$u=\int\frac{\rho}{r}\,dv,$$

étendue, comme les précédentes, au volume entier de la masse attirante.

Le calcul des trois intégrales (17) se réduit, comme on le verra plus loin, à celui de la fonction potentielle.

12. Les composantes X, Y, Z et la fonction potentielle u, variant avec la position du point P, sont des fonctions de (α, β, γ). Les valeurs de ces fonctions sont toujours finies et déterminées; car, si l'on exprime l'élément de volume dv en coordonnées polaires (r, θ, ψ) ayant pour origine le point P, on a

$$dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi$$

et, par suite,

$$X = \int\int\int \rho \frac{x-\alpha}{r} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi,$$

$$Y = \int\int\int \rho \frac{y-\beta}{r} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi,$$

$$Z = \int\int\int \rho \frac{z-\gamma}{r} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi,$$

$$u = \int\int\int \rho r \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

Les quantités $\frac{x-\alpha}{r}$, $\frac{y-\beta}{r}$, $\frac{z-\gamma}{r}$, étant les cosinus directeurs du vecteur PM, ont une valeur numérique moindre que 1. Donc, les intégrales dont il s'agit n'ont pas d'éléments infinis, et la valeur de chacune d'elles reste finie et déterminée.

13. *Dérivées premières de la fonction potentielle.* — Prenons la dérivée de u par rapport à α; en différentiant sous le signe $\int$, on a

$$\frac{du}{d\alpha} = \int \rho \frac{d\frac{1}{r}}{d\alpha} dv = -\int \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{d\alpha} dv;$$

d'ailleurs, de la relation

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

on tire

$$\frac{dr}{d\alpha} = -\frac{x-\alpha}{r}.$$

Il en résulte

$$\frac{du}{d\alpha} = \int \frac{\rho(x-\alpha)}{r^3}\,dv = X,$$

de sorte que l'on a

$$(19)\qquad \frac{du}{d\alpha} = X, \qquad \frac{du}{d\beta} = Y, \qquad \frac{du}{d\gamma} = Z,$$

ce qui établit que X, Y, Z *sont les dérivées partielles de la fonction potentielle.*

14. *Dérivées secondes de la fonction potentielle.* — Des relations (19) on tire, en différentiant sous le signe $\int$ les intégrales (17),

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = \int \rho\left[\frac{3(x-\alpha)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]dv,$$
$$\frac{d^2u}{d\beta^2} = \int \rho\left[\frac{3(y-\beta)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]dv,$$
$$\frac{d^2u}{d\gamma^2} = \int \rho\left[\frac{3(z-\gamma)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]dv.$$

Si le point P est extérieur à v, les éléments de ces intégrales ne deviennent pas infinis, et elles ont par conséquent des valeurs finies et déterminées. En les ajoutant, on a l'équation de Laplace ([1])

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} + \frac{d^2u}{d\gamma^2} = 0.$$

([1]) *Théorie de la figure des corps célestes* (*Mécanique céleste*, Liv. II, § 11).

15. Si le point P est intérieur à v, on voit que, malgré la transformation en coordonnées polaires, la fonction à intégrer pour calculer l'une des dérivées secondes devient encore infinie, parce que r reste au dénominateur. Sans entrer dans des détails sur la nature de ces intégrales, qui ont des éléments infinis, nous abandonnerons ces expressions comme impropres à la détermination des dérivées secondes, et nous opérerons cette détermination d'une autre manière.

16. Remarquons d'abord que, la valeur de r étant déterminée par la relation

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2,$$

si l'on pose, comme précédemment,

$$\varphi = \frac{1}{r},$$

les dérivées de φ par rapport à (α, β, γ) sont respectivement égales aux dérivées de la même fonction par rapport à (x, y, z) prises avec le signe contraire

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\frac{d\varphi}{dx}, \qquad \frac{d\varphi}{d\beta} = -\frac{d\varphi}{dy}, \qquad \frac{d\varphi}{d\gamma} = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Cela posé, la fonction potentielle étant mise sous la forme

$$u = \int \rho\varphi \, dv,$$

on a, en prenant sa dérivée par rapport à α,

$$\frac{du}{d\alpha} = \int \rho \frac{d\varphi}{d\alpha} dv = -\int \rho \frac{d\varphi}{dx} dv;$$

mais, d'après la formule (11) du n° 7, on a, quelle que soit la position du point P,

$$\int \rho \frac{d\varphi}{dx} dv + \int \varphi \frac{d\rho}{dx} dv = \int a \rho \varphi \, d\sigma.$$

On peut donc écrire

$$\frac{du}{d\alpha} = \int \varphi \frac{d\rho}{dx} dv - \int a \rho \varphi \, d\sigma.$$

En prenant encore une fois la dérivée par rapport à α, il vient

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = \int \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{d\rho}{dx} dv - \int a \rho \frac{d\varphi}{d\alpha} d\sigma.$$

Enfin, en remplaçant $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ par $-\frac{d\varphi}{dx}$, on obtient la première des expressions suivantes, les deux autres s'en déduisant par de simples permutations de lettres,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\alpha^2} &= -\int \frac{d\rho}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dv + \int a \rho \frac{d\varphi}{dx} d\sigma, \\ \frac{d^2 u}{d\beta^2} &= -\int \frac{d\rho}{dy} \frac{d\varphi}{dy} dv + \int b \rho \frac{d\varphi}{dy} d\sigma, \\ \frac{d^2 u}{d\gamma^2} &= -\int \frac{d\rho}{dz} \frac{d\varphi}{dz} dv + \int c \rho \frac{d\varphi}{dz} d\sigma. \end{aligned}\right.$$

En ajoutant et en posant, comme précédemment (n° 5),

$$\lambda = \frac{d\rho}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\varphi}{dz},$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\varphi}{dy} + c\frac{d\varphi}{dz},$$

il vient

$$(20)\quad \frac{d^2 u}{d\alpha^2} + \frac{d^2 u}{d\beta^2} + \frac{d^2 u}{d\gamma^2} = -\int \lambda \, dv + \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma.$$

Cela posé, si le point P est extérieur au volume v, il résulte de l'équation (15) du n° 8 que le second membre de l'équation (20) se réduit à zéro, et l'on retrouve ainsi l'équation de Laplace.

Si le point P est intérieur au volume v, il résulte de l'équation (16) du n° 8 que le second membre de l'équation (20) est égal à $-4\pi K$, K désignant la valeur de ρ

au point P, dont les coordonnées sont (α, β, γ). Donc, lorsque ce point est dans le volume v, la fonction potentielle satisfait à l'équation de Poisson

$$(21) \qquad \frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} + \frac{d^2u}{d\gamma^2} = -4\pi K.$$

17. Corollaire. — Nous donnerons enfin la démonstration d'un théorème établi par Gauss et par Chasles dans leurs recherches sur l'attraction des corps ([1]). Ce théorème, souvent utilisé dans la théorie de l'électricité, s'énonce comme il suit :

Si u est la fonction potentielle de masses, les unes intérieures, les autres extérieures à une surface fermée σ, on a

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma = -4\pi M,$$

l'intégrale s'étendant à toute la surface σ, et M *étant la somme des masses qui sont intérieures à cette surface.*

En effet, si dans la formule (7) du n° 5, où ρ et φ sont des fonctions quelconques, on remplace ρ par 1 et φ par u, il vient

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma = \int \Delta u \, dv.$$

Or, d'après l'équation de Poisson, on a, pour un point

([1]) Chasles, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. VIII, p. 209, et *Additions à la Connaissance des Temps pour l'année* 1845.

Gauss, Mémoire déjà cité (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 204 et suivantes).

Sturm, *Note sur un Mémoire de M. Chasles* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. III, p. 345).

quelconque, en désignant par K la densité en ce point,

$$\Delta u = -4\pi K.$$

Il en résulte, conformément à l'énoncé,

$$\int \frac{du}{dn}\, d\sigma = -4\pi \int K\, dv = -4\pi M;$$

et l'on doit se rappeler que, dans cette formule, la dérivée $\frac{du}{dn}$ est prise, en un point de la surface σ, suivant la normale en ce point extérieure au volume limité par la surface.

SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DES FONCTIONS RATIONNELLES;

PAR M. CH. BIEHLER.

---

1. Nous allons, dans ce qui suit, donner une démonstration élémentaire du théorème de Cauchy sur le développement en série d'une fonction, en nous bornant au cas où la fonction est algébrique et rationnelle. Nous établirons qu'une fonction algébrique rationnelle de x est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable pour toute valeur de x dont le module est inférieur à celui de la plus petite valeur de la variable pour laquelle la fonction devient infinie; la fonction n'est plus développable suivant les puissances ascendantes de x si le module de la variable dépasse cette valeur.

2. Nous allons démontrer d'abord le théorème dans

le cas simple où la fonction est de la forme $\frac{1}{x-a}$. On a identiquement

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-a} &= -\frac{1}{a\left(1-\frac{x}{a}\right)}\\ &= -\frac{1}{a}\left[1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\ldots+\frac{x^n}{a^n}+\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right]\end{aligned}$$

supposons le module de $\frac{x}{a}$ inférieur à l'unité, la série obtenue sera convergente ; il suffit, pour montrer qu'il en est ainsi, de faire voir que le module du terme complémentaire $\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}\left(1-\frac{x}{a}\right)}$ a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment.

On a, en effet, en désignant par ρ le module de $\frac{x}{a}$,

$$\text{mod}\,\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}\left(1-\frac{x}{a}\right)} < \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho};$$

ρ étant plus petit que l'unité, ρ^{n+1} a pour limite zéro, par suite aussi mod $\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}\left(1-\frac{x}{a}\right)}$ a pour limite zéro et la série est convergente.

Si le module $\frac{x}{a}$ est plus grand que 1, le module de la partie complémentaire augmente indéfiniment, car

$$\text{mod}\,\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}\left(1-\frac{x}{a}\right)} > \frac{\rho^{n+1}}{1+\rho}.$$

Or la fraction $\frac{\rho^{n+1}}{1+\rho}$ augmente indéfiniment avec n; la

série

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\ldots+\frac{x^n}{a^n}+\ldots$$

est donc divergente; il en est de même quand $\rho = 1$.

Remarquons que, si $\rho < 1$, la série des modules des divers termes de la suite précédente est une série convergente, car c'est une progression géométrique dont la raison est moindre que l'unité.

3. Proposons-nous maintenant de développer en série $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$, α étant un nombre entier.

A cet effet, considérons l'identité

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\ldots+z^{n+\alpha-1}+\frac{z^{n+\alpha}}{1-z}.$$

Prenons les dérivées d'ordre $\alpha - 1$ des deux membres, il viendra

$$\frac{(\alpha-1)!}{(1-z)^\alpha} = (\alpha-1)!+\frac{\alpha!}{1}z+\frac{(\alpha+1)!}{1.2}z^2+\ldots$$
$$+\frac{(\alpha+n-1)!}{n!}z^n+z^{n+1}\frac{\Phi(z)}{(1-z)^\alpha},$$

ou bien

$$\frac{1}{(1-z)^\alpha} = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}z^2+\ldots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}z^n+\frac{z^{n+1}\Phi(z)}{(\alpha-1)!(1-z)^\alpha}.$$

Dans cette formule $\Phi(z)$ désigne un polynôme de degré $(\alpha - 1)$ dont les coefficients ne renferment n qu'à la puissance $\alpha - 1$ au plus. Le second membre représente le quotient de 1 par $(1-z)^\alpha$ ordonné suivant les puissances croissantes de z et $\frac{z^{n+1}\Phi(z)}{(\alpha-1)!(1-z)^\alpha}$ est la partie complémentaire.

En remplaçant z par $\frac{x}{a}$, on obtient

$$\frac{(-1)^\alpha a^\alpha}{(x-a)^\alpha} = 1 + \alpha\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n + \frac{(\alpha-1)!\left(1-\frac{x}{a}\right)^\alpha}{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}\Phi\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

Nous allons démontrer que, si le module de $\frac{x}{a}$ est inférieur à l'unité, la série

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \alpha\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots \\ \quad + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n + \ldots \end{array} \right.$$

est convergente et représente $\frac{1}{\left(1-\frac{x}{a}\right)^\alpha}$.

Pour le faire voir, il suffit de montrer que le terme complémentaire

$$\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}\Phi\left(\frac{x}{a}\right)}{(\alpha-1)!\left(1-\frac{x}{a}\right)^\alpha}$$

a pour limite zéro.

Nous allons montrer pour cela que son module peut devenir plus petit que toute quantité donnée. Soit ρ le module de $\frac{x}{a}$.

Le module de $\Phi\left(\frac{x}{a}\right)$ est

$$< (n+\alpha)^{\alpha-1}[(1+\rho)^{\alpha-1} + \rho(1+\rho)^{\alpha-2} + \ldots + \rho^{\alpha-1}]$$

ou

$$\operatorname{mod}\Phi\left(\frac{x}{a}\right) < (n+\alpha)^{\alpha-1}\,\frac{(1+\rho)^{\alpha}-1}{\rho};$$

il suffit, pour le voir, de former l'expression de $\Phi\left(\frac{x}{a}\right)$.

Le module du terme complémentaire est donc moindre que

$$\rho^{n}(n+\alpha)^{\alpha-1}\,\frac{[(1+\rho)^{\alpha}-1]}{(\alpha-1)!(1-\rho)^{\alpha}};$$

le facteur $\frac{(1+\rho)^{\alpha}-1}{(\alpha-1)!\,(1-\rho)}$ est fini et $\rho^{n}(n+\alpha)^{\alpha-1}$ a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, ρ étant plus petit que 1; le terme complémentaire a donc pour limite zéro et la série (2) est convergente.

Remarquons que la série des modules des termes de la série (2) est aussi convergente. On a en effet

$$\frac{1}{(1-\rho)^{\alpha}} = 1+\alpha\rho+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\rho^{2}+\dots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!}\rho^{n}+\frac{\rho^{n+1}\Phi(\rho)}{(\alpha-1)?(1-\rho)^{\alpha}}.$$

Le terme $\frac{\rho^{n+1}\Phi(\rho)}{(\alpha-1)!\,(1-\rho)^{\alpha}}$ a pour limite zéro; car on a, comme précédemment,

$$\Phi(\rho) < (n+\alpha)^{\alpha-1}[(1+\rho)^{\alpha-1}+\rho(1+\rho)^{\alpha-2}+\dots+\rho^{\alpha-1}]$$

et par suite

$$\frac{\rho^{n+1}\Phi(\rho)}{(\alpha-1)!(1-\rho)^{\alpha}} < \frac{\rho^{n}(n+\alpha)^{\alpha-1}[(1+\rho)^{\alpha}-1]}{(\alpha-1)!(1-\rho)^{\alpha}};$$

le deuxième membre a pour limite zéro.

Supposons maintenant que le module ρ de $\frac{x}{a}$ soit supérieur à un ou égal à un. Si $\rho \geq 1$, le terme complémentaire augmente au delà de toute limite. En effet, son

module est plus grand que

$$\frac{\rho^{n+1} \bmod \Phi\left(\frac{x}{a}\right)}{(\alpha-1)!(1+\rho)^{\alpha}}.$$

Or

$$\Phi\left(\frac{x}{a}\right) = (n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(n+2)\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}(1+\varepsilon_n);$$

ε_n ayant pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, le module de $\Phi\left(\frac{x}{a}\right)$ augmente donc indéfiniment avec n; par suite $\frac{\rho^{n+1} \bmod \Phi\left(\frac{x}{a}\right)}{(\alpha-1)!(1+\rho)^{\alpha}}$ augmente aussi indéfiniment avec n : la série (2) est donc divergente quand $\bmod\left(\frac{x}{a}\right) > 1$.

4. Considérons maintenant la fonction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ où $F(x)$ est un polynôme quelconque

$$F(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-l)^{\lambda};$$

il est bien évident que, si $\frac{1}{F(x)}$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de x, $\frac{f(x)}{F(x)}$ l'est également; si la série de $\frac{1}{F(x)}$ est divergente, celle de $\frac{f(x)}{F(x)}$ l'est aussi.

Je suppose

$$\bmod\left(\frac{x}{a}\right) < 1, \quad \bmod\left(\frac{x}{b}\right) < 1, \quad \ldots, \quad \bmod\left(\frac{x}{l}\right) < 1.$$

Développons $\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}, \frac{1}{(x-b)^{\beta}}, \ldots, \frac{1}{(x-l)^{\lambda}}$ suivant les puissances ascendantes de x par la formule précédente

et soient

$$\frac{1}{(x-a)^\alpha} = A_n + A'_n,$$

$$\frac{1}{(x-b)^\beta} = B_n + B_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{(x-l)^\lambda} = L_n + L'_n,$$

A_n, B_n, ..., L_n étant l'ensemble formé par les $n+1$ premiers termes du développement de chacune des fonctions et A'_n, B'_n, ..., L'_n les termes complémentaires respectifs.

Faisons le produit de ces égalités membre à membre : il viendra

$$\frac{1}{F(x)} = A_n B_n \dots L_n + \dots + A'_n B'_n \dots L'_n.$$

A'_n, B'_n, ..., L'_n renferment en facteur la puissance $n+1$ de $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{b} \dots$, $\frac{x}{l}$; soit $A_n B_n \dots L_n = f_n(x) + \varphi_n(x)$, $f_n(x)$ étant la fonction entière de degré n renfermée dans le produit $A_n B_n \dots L_n$ et $\varphi_n(x)$ un polynôme dont tous les termes renferment en facteur des quantités $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{b}$, ..., $\frac{x}{l}$ dont le nombre est égal à $n+1$ au moins. On aura

$$\frac{1}{F(x)} = f_n(x) + R_n.$$

Je vais démontrer que R_n a pour limite zéro, quand n augmente indéfiniment. On a

$$R_n = \varphi(x) + A'_n B_n \dots L_n + \dots + A'_n B'_n \dots L'_n.$$

Soit ρ le module de la plus grande des quantités $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{b}$, ...,

$\frac{x}{l}$; ρ est moindre que 1. Chacune des expressions qui figurent dans R_n renferme en facteur un produit de la forme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{x}{b}\right)^{6_1}\cdots\left(\frac{x}{l}\right)^{\lambda_1}, \qquad \alpha_1+6_1+\ldots+\lambda_1=n+1.$$

Le module de R_n est d'ailleurs moindre que la somme des modules des termes qui composent R_n. Considérons d'abord le module de $\varphi_n(x)$. Ce module est moindre que ρ^{n+1} multiplié par p fois la somme des modules des termes qui composent le produit $A_n B_n \ldots L_n$, p étant le nombre des quantités A_n, B_n, ..., L_n; la somme des modules des termes de chacune des quantités A_n, B_n est une quantité finie; leur produit est donc une quantité finie : par suite le module de $\varphi_n(x)$ est de la forme $\rho^{n+1}A$, A étant un nombre fini.

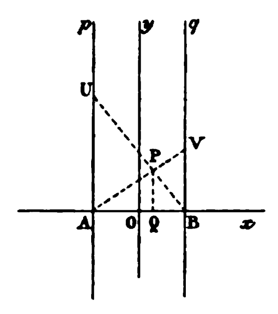
Il en est de même de chacun des termes qui composent R_n. Ils renferment tous en facteur un terme accentué dont le module a pour limite zéro; par suite, comme ces termes sont en nombre fini, la somme de leurs modules a pour limite zéro; le module de R_n a donc aussi pour limite zéro.

La fonction $\frac{1}{F(x)}$ est donc développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de x pour toute valeur de x dont le module est inférieur au module de la plus petite des quantités a, b, ..., l, et $f_n(x)$ représente avec autant d'approximation que l'on veut la fonction $\frac{1}{F(x)}$.

LES COORDONNÉES PARALLÈLES DE POINTS;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Soient, pris dans un plan, deux axes Ap et Bq perpendiculaires à la droite AB. Les droites AP et BP



coupant respectivement Bq et Ap aux points V et U, nous poserons, en tenant compte des signes,

$$p = \frac{1}{AU}, \qquad q = \frac{1}{BV},$$

et nous dirons que p et q sont les *coordonnées parallèles du point* P.

En considérant, comme nous l'avons fait dans un précédent travail ([1]), les coordonnées parallèles de droites (AV et BV) comme corrélatives des coordonnées cartésiennes, on voit que les coordonnées parallèles de points correspondent exactement aux coordonnées plückériennes de droites.

([1]) Voir *Nouvelles Annales*, p. 110; 1885

2. Par le milieu O de AB élevons à cette droite, prise pour axe Ox, la perpendiculaire Oy, et convenons de *prendre le segment* OB *pour unité de longueur*.

On voit alors immédiatement que

$$(1) \qquad p = \frac{1-x}{2y}, \qquad q = \frac{1+x}{2y},$$

d'où

$$(2) \qquad x = \frac{q-p}{q+p}, \qquad y = \frac{1}{q+p}.$$

Donc, *les équations d'une même courbe en* x *et* y *d'une part, et* p *et* q *de l'autre, sont du même degré.*

3. Étudions d'abord les particularités qu'offre l'équation de la droite.

L'équation

$$ap + bq + c = 0,$$

transformée au moyen des formules (1), devient

$$(b-a)x + 2cy + (a+b) = 0.$$

De là ces conséquences :

Si $a + b = 0$, la droite passe par O;
Si $a = 0$, la droite passe par A;
Si $b = 0$, la droite passe par B;
Si $a = b$, la droite est parallèle à Ox;
Si $c = 0$, la droite est parallèle à Oy.

L'abscisse à l'origine a pour expression

$$X = \frac{a+b}{a-b}.$$

On tire de là

$$\frac{X+1}{X-1} = \frac{a}{b}$$

ou, si M est le point où la droite coupe l'axe AB,

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{a}{b}. \tag{3}$$

4. Voici une première application de cette formule (3),

Soient $P_1P_2P_3$ *un triangle,* A *et* B *deux points, pris d'une manière quelconque dans son plan. Les côtés* P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 *de ce triangle coupent la droite* AB *en des points* M_3, M_1, M_2 *dont les conjugués harmoniques par rapport aux points* A *et* B *sont* M'_3, M'_1, M'_2. *Les droites* $P_1M'_1$, $P_2M'_2$ *et* $P_3M'_3$ *concourent en un même point.*

Prenons, par les points A et B, des axes Ap et Bq perpendiculaires à AB, et soient, pour ces axes parallèles, (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3) les coordonnées des points P_1, P_2, P_3.

L'équation de la droite P_1P_2 peut évidemment s'écrire

$$(p - p_1)(q_2 - q_1) - (q - q_1)(p_2 - p_1) = 0.$$

Donc, d'après la formule (3),

$$\frac{M_3B}{M_3B} = -\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}.$$

Par suite,

$$\frac{M'_3A}{M'_3B} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1},$$

et l'équation de la droite $P_3M'_3$ est

$$(p - p_3)(q_2 - q_1) + (q - q_3)(p_2 - p_1) = 0$$

ou

$$p(q_2 - q_1) + q(p_2 - p_1) = p_3(q_2 - q_1) + q_3(p_2 - p_1).$$

De même les équations de $P_2M'_2$ et de $P_1M'_1$ sont

$$p(q_1 - q_3) + q(p_1 - p_3) = p_2(q_1 - q_3) + q_2(p_1 - p_3),$$
$$p(q_3 - q_2) + q(p_3 - p_2) = p_1(q_3 - q_2) + q_1(p_3 - p_2).$$

Faisant la somme de ces trois dernières équations, on obtient une identité, ce qui démontre le théorème.

5. Reprenant les équations du n° 3, nous voyons que le coefficient angulaire m de la droite

$$ap + bq + c = 0$$

est donnée par

(4) $$m = \frac{a - b}{2c}.$$

La condition de parallélisme de deux droites est donc

$$\frac{a - b}{c} = \frac{a' - b'}{c'};$$

la condition de perpendicularité

$$\frac{(a - b)(a' - b')}{4cc'} = -1;$$

et l'angle V de deux droites est donné par

(5) $$\tan V = \frac{c'(a - b) - c(a' - b')}{4cc' + (a - b)(a' - b')}.$$

6. Cherchons encore, en coordonnées parallèles de points, la distance du point (P, Q) à la droite

$$ap + bq + c = 0.$$

En coordonnées cartésiennes, on a pour le point

$$X = \frac{Q - P}{Q + P}, \qquad Y = \frac{1}{Q + P},$$

et pour la droite

$$(b - a)x + 2cy + (a + b) = 0.$$

TABLE DES MATIÈRES.

Octobre 1887.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

(**Troisième Série.**) — **Novembre 1887.**

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE.

NOVEMBRE 1887.

S'adresser, pour la rédaction,

à M. BRISSE, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine),
ou à M. ROUCHÉ, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

COMBEROUSSE (Charles de), Ingénieur civil, Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, ancien Président du Jury d'admission à la même École, ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal. — **Cours de Mathématiques**, à l'usage des Candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure et à l'École centrale des Arts et Manufactures. 6 volumes in-8, avec figures dans le texte.

Chaque Volume se vend séparément :

TOME I[er]. — *Arithmétique* et *Algèbre élémentaire* (avec 38 figures dans le texte). 3[e] édition; 1884 .... 10 fr.

On vend séparément :

Arithmétique .... 4 fr.
Algèbre élémentaire .... 6 fr.

TOME II. — *Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace. — Trigonométrie rectiligne et sphérique* (avec 499 figures dans le texte). 2[e] édition; 1882 .... 12 fr.

On vend séparément :

Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace. 7 fr.
Trigonométrie rectiligne et sphérique, suivie de Tables des valeurs des lignes trigonométriques naturelles .... 5 fr.

TOME III. — *Algèbre supérieure.* I[re] Partie : *Compléments d'Algèbre élémentaire (Déterminants, fractions continues, etc.). — Combinaisons. — Séries. — Étude des Fonctions. — Dérivées et Différentielles.* 2[e] édition; 1887 .... 15 fr.

TOME IV. — *Algèbre supérieure.* II[e] Partie : *Etude des imaginaires. Théorie générale des Équations.* 2[e] édition .... (*Sous presse.*)

TOME V. — *Géométrie analytique, plane et dans l'espace. Éléments de Géométrie descriptive.* 2[e] édition .... (*Sous presse.*)

TOME VI. — *Éléments de Géométrie supérieure. Notions sur la résolution des problèmes.* 2[e] édition .... (*En préparation.*)

ROUCHÉ (Eugène), Professeur à l'École Centrale, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, etc., et **COMBEROUSSE (Charles de)**, Professeur à l'École Centrale et au Conservatoire des Arts et Métiers, etc. — **Traité de Géométrie**, conforme aux Programmes officiels, renfermant un très grand nombre d'Exercices et plusieurs Appendices consacrés à l'exposition des PRINCIPALES MÉTHODES DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE. 5[e] édition, revue et notablement augmentée. In-8 de XLIX-966 pages, avec 616 figures dans le texte, et 1095 questions proposées; 1883 .... 16 fr.

Prix de chaque Partie :

I[re] PARTIE. — *Géométrie plane* .... 7 fr.
II[e] PARTIE. — *Géométrie de l'espace; Courbes et surfaces usuelles* .... 9 fr.

Cet Ouvrage, si complet, dont le succès croissant n'a été, pour MM. Rouché et de Comberousse, qu'un encouragement à mieux faire, est conforme aux derniers Programmes officiels. Il renferme un très grand nombre d'Exercices et de Questions proposées, classés par paragraphes. Mais le caractère distinctif qui lui donne toute sa valeur consiste dans les APPENDICES consacrés à l'exposition, à la fois concise et approfondie, des principales Méthodes de la *Géométrie moderne*. C'est là un véritable service rendu à la vulgarisation de ces Méthodes. Comme l'a dit M. Chasles, en présentant la première édition de ce Traité à l'Académie des Sciences : « il paraît satisfaire aux besoins réels de l'enseignement en France ». Depuis, les Auteurs n'ont rien négligé pour mériter de plus en plus cet éloge. De nombreuses traductions ont prouvé qu'on en jugeait ainsi à l'étranger.

La distance d cherchée est donc

$$d = \frac{(b-a)\dfrac{Q-P}{Q+P} + 2c\dfrac{1}{Q+P} + (a+b)}{\sqrt{(b-a)^2+4c^2}},$$

ou

$$(6) \qquad d = \frac{2(aP+bQ+c)}{(P+Q)\sqrt{(b-a)^2+4c^2}}.$$

7. L'équation générale des coniques, dans ce système de coordonnées, est (n° 2) l'équation complète du second degré

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2eq + f = 0.$$

Si, à l'aide des formules (1), on passe aux coordonnées cartésiennes, et que l'on représente par

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation à laquelle on parvient, on a

$$(7) \quad \begin{cases} A = \dfrac{a-2b+c}{4}, & B = \dfrac{e-d}{2}, & C = f, \\ D = \dfrac{c-a}{4}, & E = \dfrac{d+e}{2}, & F = \dfrac{a+2b+c}{2}, \end{cases}$$

ou

$$(8) \quad \begin{cases} a = A - 2D + F, & b = F - A, & c = A + 2D + F \\ d = E - B, & e = B + E, & f = C. \end{cases}$$

Ces formules suffisent à déduire toute la théorie des coniques en coordonnées parallèles de points de la théorie en coordonnées cartésiennes.

Ainsi, suivant que la quantité

$$(e-d)^2 - (a-2b+c)f$$

est positive, nulle ou négative, la conique est une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

Si l'on a, à la fois,

$$a - 2b + c = 4f, \qquad d = e,$$

la conique est un cercle; c'est une hyperbole équilatère si

$$a - 2b + c + 4f = 0,$$

8. Aux formes

$$pq = k, \qquad q^2 + p^2 = k, \qquad q^2 - p^2 = k$$

répondent les équations cartésiennes

$$x^2 + 4ky^2 = 1, \qquad 2ky^2 - x^2 = 1, \qquad ky^2 + x = 0.$$

La première représente une ellipse ou une hyperbole selon que k est positif ou négatif. Les points A et B sont des sommets de la courbe et Ox et Oy en sont les axes.

La deuxième représente une hyperbole ayant Oy pour axe transverse et Ox pour axe non transverse; en outre, A et B sont les sommets de l'*hyperbole complémentaire*. Enfin la dernière représente une parabole ayant la droite Ox pour axe, et le point O pour sommet.

9. L'équation de la tangente au point (p_1, q_1) sera

$$(9) \qquad (p - p_1)\,dq_1 = (q - q_1)\,dp_1.$$

Si l'équation de la courbe est $F(p, q) = 0$, l'équation (12) peut s'écrire

$$(10) \qquad (p - p_1)F'_{p_1} + (q - q_1)F'_{q_1} = 0.$$

Donc, d'après (3), si M est le point où la tangente coupe l'axe AB, on a

$$(11) \qquad \frac{MA}{MB} = \frac{F'_{p_1}}{F'_{q_1}}.$$

L'équation de la polaire du point (p_1, q_1, r_1) est

$$p\,F'_{p_1} + q\,F'_{q_1} + r\,F'_{r_1} = 0,$$

r et r_1 étant introduits pour l'homogénéité. Le centre, pôle de la droite de l'infini, est donc donné par les relations

$$F'_{p_1} = F'_{q_1}, \qquad F'_{r_1} = 0.$$

10. Tout point à l'infini ayant évidemment ses coordonnées p et q égales et de signes contraires, on aura les points d'intersection de la courbe et de la droite de l'infini, à l'aide des deux relations

$$F(p, q) = 0, \qquad p + q = 0.$$

Il n'y aura qu'à porter les systèmes de valeurs, p_1 et q_1, de p et de q, satisfaisant simultanément à ces deux équations, dans l'équation (9) de la tangente, pour obtenir les équations des asymptotes. Si (p_1, q_1) est une solution double, triple, etc., de ce système d'équations, l'asymptote correspondante a un contact double, triple, etc., à l'infini avec la courbe considérée.

Si l'équation de la courbe est de degré n et que le système précédent n'admette que $n-k$ systèmes de solutions finies communes, c'est qu'il y a k asymptotes parallèles à l'axe AB. Il est facile de déterminer ces asymptotes. En effet, l'équation de toute droite parallèle à AB est de la forme

$$p + q = C.$$

Éliminant q entre cette équation et celle de la courbe, on obtient une équation généralement de degré $n-k$ en p, le coefficient du terme en p^{n-k} étant un polynôme $\varphi_k(C)$ de degré k en C. Pour que la parallèle à AB considérée soit une asymptote, il faut qu'une des racines de l'équation en p soit infinie et, par suite, que le coefficient du terme en p^{n-k} soit nul, c'est-à-dire que

$$\varphi_k(C) = 0.$$

La résolution de cette équation fait donc connaître

les valeurs de C qui donnent les asymptotes parallèles à AB. Si cette équation a elle-même une racine infinie, c'est-à-dire si son degré se réduit à $k-1$, c'est que l'axe AB est lui-même asymptote à la courbe.

Par exemple, pour la courbe

$$(ab-k^2)(p+q)^2-b(q^2-p^2)-a(q+p)+q-p=0,$$

on trouve les deux asymptotes

$$(a+1)p+(a-1)q=0, \qquad p+q=\frac{1}{b}.$$

La première est la parallèle à Oy dont la distance au point O est égale à a, et la seconde la parallèle à Ox dont la distance au point O est égale à b.

11. Disons maintenant quelques mots de l'application du *principe de dualité* au moyen des coordonnées parallèles de points.

Si, dans les équations d'un problème traité en x et y, on remplace ces variables par p et q, on obtient une proposition corrélative.

D'après les formules (1), la transformation ainsi définie est un cas particulier de la transformation homographique générale. Donc :

Le rapport anharmonique de quatre points se conserve dans la transformation.

On voit en outre qu'à la droite à l'infini en x et y correspond l'axe AB en p et q. Par conséquent, au centre de gravité d'un système de points en x et y, correspond en p et q le pôle de l'axe AB par rapport à un système de points; au centre d'une conique correspond le pôle de AB par rapport à une conique, etc.

12. Pour la transformation des propriétés angulaires, la solution est fournie évidemment par le beau théo-

rème de Laguerre. Mais ici la solution résulte immédiatement de la formule (3).

En effet, soient, en coordonnées cartésiennes, des droites dont les coefficients angulaires sont m, m', m'', ... Si les droites corrélatives en coordonnées p et q coupent l'axe AB aux points M, M′, M″, ..., on a, d'après (3),

$$\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = -m, \quad \frac{\text{M}'\text{A}}{\text{M}'\text{B}} = -m', \quad \frac{\text{M}''\text{A}}{\text{M}''\text{B}} = -m'', \quad \ldots.$$

Donc, à la relation

$$\varphi(m, m', m'', \ldots) = 0,$$

qui exprime une propriété angulaire, correspond la relation

$$\varphi\left(-\frac{\text{MA}}{\text{MB}}, -\frac{\text{M}'\text{A}}{\text{M}'\text{B}}, -\frac{\text{M}''\text{A}}{\text{M}''\text{B}}, \ldots\right) = 0.$$

En particulier, à deux droites perpendiculaires,

$$mm' = -1,$$

correspondent deux droites liées par la relation

$$\frac{\text{MA}}{\text{MB}}\,\frac{\text{M}'\text{A}}{\text{M}'\text{B}} = -1,$$

c'est-à-dire que *si ces droites coupent l'axe* AB *respectivement aux points* M *et* M′, *le symétrique de chacun de ces deux points par rapport au milieu* O *de* AB *coïncide avec le conjugué harmonique de l'autre par rapport aux points* A *et* B. Autrement dit : *Les points* M *et* M′ *sont conjugués harmoniques par rapport aux points de l'axe* AB *situés de part et d'autre du milieu* O *de* AB *à la distance* $\sqrt{-1}$ *de ce point.* Ces deux derniers points sont corrélatifs des *ombilics* en coordonnées cartésiennes.

Toutes les propriétés où interviennent des droites

perpendiculaires sont immédiatement transformées par l'emploi de la proposition précédente.

Par exemple le théorème de Simpson et celui de Frégier donnent respectivement les propositions suivantes :

Soit $P_1P_2P_3$ *un triangle inscrit dans une hyperbole. Les côtés* P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 *de ce triangle coupent l'axe non transverse aux points* M_3, M_1, M_2. *On prend les symétriques* M'_3, M'_1, M'_2, *par rapport au centre de la courbe, des conjugués harmoniques de* M_3, M_1 *et* M_2 *par rapport aux sommets de l'hyperbole complémentaire. Si* P *est un point quelconque de l'hyperbole, les droites* PM'_3, PM'_1, PM'_2 *rencontrent respectivement les côtés* P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 *du triangle inscrit en trois points qui sont en ligne droite.*

Soient K *une conique sur laquelle on prend un point fixe* P, A *et* B *deux points quelconques du plan de cette conique. Une corde* $P'P''$ *varie dans la conique* K *de telle façon que, si les droites* PP' *et* PP'' *coupent la droite* AB *aux points* M' *et* M'', *le symétrique de chacun de ces points par rapport au milieu de* AB *se confonde avec le conjugué harmonique de l'autre par rapport aux points* A *et* B. *La corde* $P'P''$ *passe par un point fixe.*

N. B. — Page 493, ligne 10, *au lieu de* AV, *lisez* AU.
Page 495, ligne 20, *au lieu de* $\frac{M_1B}{M_2B}$, *lisez* $\frac{M_1A}{M_2B}$.

ERRATA AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRON.

Page 35, log 24833, *au lieu de* 0292, *lisez* *0292.

BIBLIOGRAPHIE.

THERMODYNAMIQUE; par M. *J. Bertrand*, de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — Paris, Gauthier-Villars, 1887.

Si, comme l'a dit un éminent critique, on est d'autant plus apte à juger une œuvre que l'on a plus d'affection pour son auteur, je serais, certes, dans les conditions les plus favorables pour apprécier le nouveau Livre de M. Bertrand : il me semblait, en le lisant, entendre la voix aimée de l'illustre Maître, qui sait si bien instruire et charmer.

La théorie mécanique de la chaleur, encore obscure sur bien des points, surtout à cause de son côté métaphysique, se trouve ici exposée avec une précision et une clarté que ne laissaient guère espérer les essais, d'ailleurs fort honorables, tentés jusqu'à ce jour. Aussi bien, ce n'est pas le moindre mérite de M. Bertrand, que son ardeur à attaquer de front les difficultés, et son habileté à les résoudre.

Un jour, il m'en souvient encore, quoiqu'il y ait déjà plus de vingt ans, M. Taine me demandait quelle était la faculté maîtresse du savant Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, celle qui dominait dans ses écrits comme dans ses Leçons? La réponse me fut suggérée par une réflexion de M. Tchebichef, ce géomètre, si français par l'esprit et par le cœur, qu'on a justement surnommé le Gauss de la Russie. Je l'avais rencontré la veille au Collège de France; et comme je m'expliquais peu comment, pendant un séjour de courte durée à Paris, il trouvait le temps d'assister à des leçons : « Il y a deux choses », me dit-il, « qui m'attirent au Cours de M. Bertrand : c'est d'abord l'originalité des idées, puis la sincérité de son enseignement ».

Les aperçus profonds et les recherches ingénieuses qui caractérisent la manière du Maître, on les retrouve à profusion dans ce Livre qui est appelé à un éclatant succès. A l'Introduction, qui est consacrée aux gaz parfaits, succèdent l'exposition des deux principes fondamentaux de la doctrine, la formation des deux équations différentielles correspondantes et la théorie

de la fonction dite *caractéristique*. Viennent ensuite, après plusieurs problèmes théoriques fort intéressants, les applications aux phénomènes naturels; on remarquera dans cette partie des formules nouvelles qui représentent avec une exactitude surprenante les tensions maxima des vapeurs, et une belle étude sur la condensation pendant la détente, circonstance ignorée au temps de Regnault qui n'avait donc pu en tenir compte dans ses calculs. L'Ouvrage se termine par des notions sur les cycles non réversibles et sur le travail de l'électricité. Le cadre restreint de notre Journal m'interdit une analyse plus détaillée; mais je ne veux pas finir sans signaler à l'attention deux Chapitres qui offrent un attrait particulier; l'un a pour titre : les *Idées de Mayer*, et l'autre les *Idées de Carnot;* leur lecture procurera aux délicats la satisfaction sans mélange que l'on éprouve en face d'une œuvre d'art accomplie. E. R.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1569. Étant données une conique et une tangente à cette courbe, aux points A et B où cette tangente rencontre les axes de la conique, on élève des perpendiculaires à ces axes; puis, du point de rencontre M de ces perpendiculaires on mène les tangentes MC et MD à la conique. Trouver, lorsque la tangente AB varie, l'enveloppe de la corde CD et le lieu du point de rencontre P des normales aux extrémités C et D de cette corde.

(CHAMBON.)

1570. Étant donnée la relation

$$\sin(x-y) = m\sin(x+y),$$

dans laquelle m désigne un nombre donné dont la valeur absolue est inférieure à 1, développer y en série suivant les puissances croissantes de m, et indiquer la forme du reste lorsqu'on ne prend qu'un nombre limité de termes.

(E. ROUCHÉ.)

SUR LE PRINCIPE DE L'ÉNERGIE;

Par M. Maurice LÉVY,
Membre de l'Institut ([1]).

Sources de travail; énergie.

1. Tout travail mécanique suppose la coexistence des deux éléments : force et vitesse. Un seul de ces éléments suffit pour constituer une *source* de travail; car, si l'on possède soit de la force, soit de la vitesse, on peut toujours, à l'aide d'un mécanisme convenable, l'utiliser à vaincre des résistances, c'est-à-dire à produire du travail.

Il est d'ailleurs évident que réciproquement la possession de l'un des deux éléments constitutifs du travail (ou, ce qui revient au même, la possession de matières telles qu'un combustible, une pile, etc., propres à *fabriquer* un tel élément, si on ne le possède pas directement) est aussi nécessaire pour constituer une source de travail.

Il résulte de là que toutes les sources de travail, si variées qu'elles nous apparaissent dans la nature, se réduisent, en dernière analyse, à deux espèces : celles qui sont alimentées par de la force et celles qui sont alimentées par de la vitesse ou du mouvement.

Le travail utile maximum que peut fournir une source quelconque de travail se nomme l'*énergie* de cette source.

([1]) Leçon professée au Collège de France en 1880 et, depuis, partiellement, à l'École centrale des Arts et Manufactures.

L'énergie des sources alimentées par de la force est qualifiée *potentielle*; l'énergie des sources alimentées par du mouvement est qualifiée *cinétique* (ou parfois *actuelle*).

A présent, ces deux espèces d'énergie, les seules, d'après ce qui précède, pouvant être distinctes, le sont-elles réellement?

Il serait téméraire, dans l'état actuel de la Science, d'essayer de trancher une telle question. Il arrivera peut-être un jour où tous les phénomènes mécaniques s'expliqueront par de simples transformations de mouvement opérées par l'intermédiaire de l'éther considéré comme mécanisme de liaison entre tous les corps de la nature, et où, par suite, la notion de force et, avec elle, celle d'énergie potentielle disparaîtront de la Science. Alors il serait établi que l'énergie, sous quelque forme qu'elle se présente à nous dans l'univers est *une*. Jusque-là, il convient d'envisager deux espèces d'énergie, mais deux seulement.

On parle souvent d'énergie mécanique, d'énergie calorifique, d'énergie électrique, d'énergie magnétique ou électro-magnétique.

Ces qualificatifs, il importe de ne pas l'oublier, ne servent qu'à désigner la provenance matérielle de ces diverses énergies; mais ils ne dispensent pas de rechercher, pour chacune d'elles, si elle est cinétique ou potentielle.

Expressions mathématiques des deux espèces d'énergie.

2. Considérons un système matériel en mouvement sous l'influence de forces quelconques extérieures ou intérieures.

L'énergie cinétique du système à un instant quelcon-

que t est le travail utile maximum qu'il est possible de se procurer en n'utilisant que les vitesses acquises, à cet instant, par les divers points du système, sans utiliser aucune des forces qui le sollicitent.

L'énergie potentielle du système, à l'instant t, est, de même, le travail utile maximum qu'il est possible de se procurer à partir de cet instant en n'utilisant que les forces *intérieures* du système sans utiliser les vitesses acquises de ses points, ni les forces extérieures, même si ces dernières forces se trouvaient être utilisables, c'est-à-dire non résistantes.

Les forces extérieures, en effet, ou actions des corps extérieurs sur le système matériel considéré, ont leur source en dehors de ce système; celui-ci les subit, mais n'est pour rien dans leur existence, et elles ne sont pour rien dans ses facultés et, en particulier, dans sa faculté de produire du travail. Elles ne doivent donc pas intervenir dans la définition de son énergie potentielle.

On appelle *énergie totale*, ou simplement *énergie* d'un système matériel à un instant t, la somme de ses énergies cinétique et potentielle à cet instant.

L'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie totale sont, par définition, trois nombres *essentiellement positifs de kilogrammètres*.

Théorème I. — *L'énergie cinétique d'un système matériel à un instant quelconque est égale à sa demi-force vive à cet instant.*

Considérons, en effet, un système matériel en mouvement et concevons qu'à un instant quelconque t on supprime toutes les forces qui le sollicitent, de façon à ne disposer que de ses vitesses acquises à cet instant. Pour utiliser ces vitesses à la création d'un travail, concevons qu'on attelle chaque point du système à un fil placé

dans la direction de la vitesse acquise par ce point, à l'arrière de cette vitesse, et qu'après avoir assujetti ce fil à passer par un point fixe (ou au travers d'un petit œil fixe) on attache un poids à son extrémité librement pendante.

Pendant les premiers instants qui suivront celüi où l'on a supprimé les forces, chacun des poids sera soulevé en vertu de la vitesse du point matériel auquel il est attelé. Donc le centre de gravité de l'ensemble des poids sera lui-même soulevé pendant un temps plus ou moins long. Le produit du poids total P attaché aux extrémités des divers fils, par la hauteur maxima à laquelle on peut ainsi élever son centre de gravité, représente le travail utile maximum qu'il est possible d'obtenir en utilisant les vitesses acquises, à l'aide de ce mécanisme. Or, si l'on désigne par Σmv^2 la force vive du système à l'instant t, par $\Sigma mv'^2$ sa force vive à un instant postérieur t', par z la hauteur dont s'est élevé le centre de gravité pendant l'intervalle de temps $t'-t$, le théorème des forces vives appliqué à cet intervalle de temps donne

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv'^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = -\mathrm{P}z,$$

d'où

$$\mathrm{P}z = \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv'^2.$$

Le premier terme du second membre est une grandeur fixe; le second est seul variable avec le temps t'. Donc, le premier membre devient maximum à l'instant où le terme soustractif $\Sigma mv'^2$ est devenu aussi petit que possible, c'est-à-dire nul. Et comme il est composé de termes tous positifs, il ne peut s'annuler que si chacun de ses termes s'annule séparément, c'est-à-dire si toutes les vitesses v' sont devenues nulles. Jusque-là, le centre de gravité des poids s'élève; à partir de ce moment, il s'abaisse, le système des poids entraînant les points du système matériel au lieu d'être soulevé par eux.

Ainsi, si on appelle h la valeur maxima de z, on aura

$$Ph = \frac{1}{2}\Sigma mv^2.$$

Il est clair que si l'on avait utilisé les vitesses données à vaincre des résistances autres que la pesanteur et à l'aide de quelque mécanisme que ce fût, les mêmes raisonnements eussent conduit à la même valeur du travail utile maximum obtenu.

Théorème II. — *L'énergie potentielle d'un système matériel à un instant quelconque t est égale au travail, essentiellement positif, des forces* intérieures *du système matériel, lorsqu'il passe de la position qu'il occupe à l'instant considéré, à sa position d'équilibre stable.*

On sait, et nous admettons que les forces intérieures d'un système matériel dérivent d'une fonction de forces, c'est-à-dire que le travail de ces forces, lorsque le système passe d'une position à une autre, ne dépend que de ces positions et non de la façon dont il est passé de l'une à l'autre.

S'il n'en était pas ainsi, le théorème que nous voulons établir n'aurait aucun sens.

Soient donc (A) la position du système à l'instant t et V la valeur correspondante positive ou négative de la fonction des forces intérieures, V étant ainsi une fonction des coordonnées des divers points du système, à l'instant considéré.

Supposons que le système passe de la position (A) à une nouvelle position quelconque (A′) et soit V′ la nouvelle valeur de la fonction V.

Le travail des forces intérieures, pour ce déplacement, est, comme on sait, égal à l'accroissement correspon-

dant positif ou négatif

$$V' - V$$

de la fonction des forces.

Comme le second terme de cette différence est une quantité donnée, la différence devient maxima en même temps que son premier terme V′. Donc, pour avoir l'énergie potentielle du système, c'est-à-dire le travail maximum qu'il est possible de se procurer en utilisant ses forces intérieures, il faut amener le système de la position (A) qu'il occupe à l'instant considéré à la position (A′) pour laquelle la fonction des forces atteint sa valeur maxima. Mais on sait que cette position est la position d'équilibre stable, ce qui établit la proposition énoncée.

Remarque. — Si la fonction V présentait plusieurs maxima, c'est-à-dire si le système admettait plusieurs positions d'équilibre stable, il faudrait choisir celle qui répond au plus grand de tous les maxima de V. Soit C ce plus grand maximum et désignons par Π l'énergie potentielle du système à l'instant t; on aura

$$\Pi = C - V,$$

c'est-à-dire que *l'énergie potentielle d'un système à un instant quelconque s'obtient en retranchant la valeur de la fonction de ses forces intérieures à cet instant d'une constante* C *représentant la plus grande valeur possible de cette fonction.*

Les deux grandeurs C et V peuvent être positives ou négatives; mais, comme cela doit être, leur différence est essentiellement positive ou nulle. Elle est nulle pour $V = C$, c'est-à-dire que *l'énergie potentielle d'un système matériel placé dans la position d'équilibre stable est nulle.*

Exemples ; réflexions sur la difficulté de qualifier certaines énergies.

3. Avant d'aller plus loin, nous allons éclaircir ce qui précède par quelques exemples.

a. Nous avons déjà vu (n° 2) comment on peut utiliser les vitesses d'un système matériel quelconque pour produire du travail.

A présent, considérons, au contraire, un système matériel soumis à des forces quelconques ; mais plaçons-le sans vitesse dans une position d'équilibre *instable*. Il restera en repos. Ainsi, ici on n'a à sa disposition que l'élément force. Mais si on dérange le système infiniment peu, ce qui ne coûte pas de travail, il se mettra en mouvement et le travail des forces qui le sollicitent sera, du moins pendant un certain temps, essentiellement positif et, par suite, utilisable. Ainsi, un pendule placé au haut de sa course ne produit naturellement pas de travail tant qu'il est en repos ; mais si on le dérange infiniment peu, le travail de la pesanteur sera positif pendant toute la durée de la descente et l'on pourra, à l'aide d'une poulie, utiliser son mouvement à soulever un poids ou vaincre toute autre résistance.

b. Supposons un pendule maintenu en repos dans une position inclinée à l'aide d'un fil attaché à un point fixe, le fil ayant strictement la résistance voulue pour pouvoir soutenir le pendule. Ici encore, on dispose d'une force : le poids du pendule, mais sans vitesse. Mais, si l'on rompt le fil, ce qui, par hypothèse, n'exige qu'un effort infiniment petit, le pendule se mettra en mouvement et, pendant sa descente, permettra encore de produire un travail.

c. Supposons de même, un ressort comprimé et maintenu ainsi par un fil qui ait strictement la résistance voulue pour pouvoir remplir cet office. On dispose encore d'une force : la force de tension du ressort. Mais si l'on rompt le fil, ce qui, par hypothèse, n'exige qu'un effort infiniment petit, on se procurera la vitesse : le ressort se mettra en mouvement et permettra, en se détendant, de vaincre des résistances qu'on lui opposerait. Le maximum du travail qu'il est possible d'obtenir se produira naturellement quand le ressort sera complètement détendu. C'est ce travail accompli depuis la position initiale du ressort jusqu'à sa position naturelle qui mesure l'énergie que possédait le ressort dans l'état de tension où on l'avait maintenu.

d. Supposons un réservoir renfermant de l'eau à un niveau supérieur à celui de la nappe ambiante, ce réservoir étant fermé par un robinet. Si l'on ouvre le robinet, l'eau, en tombant, permettra de faire tourner une roue hydraulique et de vaincre une force résistante appliquée à cette roue. Si elle tombe dans un réservoir inférieur, elle aura fourni tout le travail dont elle est capable quand elle se sera entièrement écoulée. Le travail qu'elle aura alors fourni et qui mesure son énergie est égal à son poids multiplié par la distance verticale entre ses centres de gravité dans les réservoirs supérieur et inférieur.

Remarque. — On voit que, pour pouvoir produire du travail avec un réservoir d'eau, il faut deux niveaux ou une *chute*. Un volume d'eau, quelque grand qu'il fût, tout au même niveau, ne permettrait pas de produire du travail, c'est-à-dire que son énergie serait zéro. Cette eau, en effet, serait en équilibre stable.

e. Supposons un cylindre vertical muni d'un piston

et rempli d'un gaz à une pression *supérieure à la pression atmosphérique :* admettons que le piston soit maintenu en repos par un arrêt fixe ayant strictement la force nécessaire pour cela. Si l'on rompt cet arrêt, ce qui n'exige qu'un effort infiniment petit, le piston se soulèvera et pourra soulever un poids ou vaincre toute autre résistance.

Son énergie est le travail accompli depuis l'instant initial jusqu'à la détente complète, la détente s'accomplissant dans un cylindre imperméable à la chaleur.

Remarque. — On ne peut utiliser une pression qu'à la condition d'avoir un milieu à une pression moindre, c'est-à-dire une *chute* de pression. Un gaz qui serait partout à la même pression, quelque grande que fût sa masse, aurait une énergie zéro.

f. Supposons que l'on possède une source de chaleur à une température *supérieure* à celle du milieu ambiant. Si on la met en communication avec un cylindre muni d'un piston et rempli d'air à la pression atmosphérique, la force expansive de l'air croîtra et pourra être utilisée.

Remarque. — Si l'on ne possédait qu'un seul milieu partout à la même température, on ne pourrait pas l'utiliser. Mais une *chute* de température est une source de travail et possède une énergie aussi bien qu'une chute de pression ou une chute d'eau.

Dans ces deux derniers cas, on voit qu'on possède directement l'un des deux éléments constitutifs du travail : la force, par le poids de l'eau ou la pression du gaz, c'est-à-dire que les énergies correspondantes sont des énergies potentielles.

La possession d'une source de chaleur doit être considérée comme fournissant aussi un des éléments du

travail. On admet, en effet, aujourd'hui que les molécules de la matière pondérable, même quand elles paraissent en repos, sont douées de mouvement d'amplitude inappréciable, mais avec des vitesses d'autant plus grandes que leur température est plus élevée. Donc, communiquer de la chaleur à un corps, c'est accroître les vitesses de ces mouvements invisibles et que Clausius appelle *stationnaires*.

D'après cela, l'énergie calorifique doit être regardée comme cinétique.

g. Un courant électrique, étant envoyé dans une machine dynamo-électrique réceptrice, lui permet de produire du travail. Donc, un courant électrique possède de l'énergie; un courant électrique étant régardé comme un mouvement, son énergie est regardée comme cinétique.

h. Une bouteille de Leyde (généralement un condensateur électrique chargé) permet de produire un courant. Il suffit de mettre les deux armatures en communication par un fil conducteur. Si, en un point de ce conducteur. on place une machine dynamo-électrique réceptrice, on produira du travail. Donc, un condensateur représente également de l'énergie. Cette énergie est considérée comme potentielle, étant due aux tensions des deux électricités contraires dont l'accumulation constitue le condensateur.

k. Un aimant naturel ou artificiel est le siège d'une force; on peut l'utiliser pour déplacer des corps. C'est donc aussi une source de travail. Maxwell, par des raisons profondes qui ne sauraient trouver place ici, regarde cette énergie comme potentielle. Si l'on ne considère un aimant que comme constituant une force attirante, il est

clair qu'on doit regarder l'énergie correspondante comme potentielle. Si, au contraire, on admet, avec Ampère, que l'aimantation est due à des courants fermés, de dimensions très petites, il semblerait qu'on dût en regarder l'énergie comme cinétique.

En général, il existe une certaine incertitude pour qualifier les énergies autres que celles d'origine mécanique et même pour certaines de celles-ci. Ainsi, selon la théorie cinétique des gaz, les molécules d'un gaz même en repos apparent sont douées de mouvements stationnaires très rapides, d'où résultent des chocs répétés des molécules entre elles et sur les parois. Ce qui nous apparaît comme une pression statique serait le résultat de ces chocs. D'après cela, l'énergie due à la pression d'un gaz ne serait pas, dans son essence première, potentielle, mais cinétique.

Cette incertitude plus ou moins grande où l'on est, relativement à la qualité de certaines énergies, semblerait devoir, dès l'abord, enlever à cette théorie tout intérêt.

Mais le principe de l'énergie nous montrera que l'on peut impunément se tromper sur les quantités d'énergie de chaque sorte qui interviennent dans un phénomène, pourvu qu'on ne se trompe pas sur leur total.

Objet de la théorie de l'énergie.

4. Les exemples qui précèdent montrent suffisamment que, partout où se manifeste l'énergie, il se produit l'un des deux phénomènes suivants ou les deux :

1° Transformation d'énergie cinétique en énergie potentielle ou *vice versa;*

2° Communication ou transmission d'énergie d'un système matériel à un autre.

Ainsi, si l'on considère l'eau renfermée dans un réservoir et destinée à faire fonctionner une roue hydraulique, au début, tout est en repos et l'énergie de l'eau est entièrement potentielle. A un instant postérieur quelconque, le niveau de l'eau a baissé et son énergie potentielle a diminué; mais, en revanche, la roue et les résistances qui y sont appliquées ont acquis des vitesses et du travail a déjà été produit. Donc l'énergie potentielle disparue du réservoir a été, en partie, transmise à la roue qui l'a transformé en énergie cinétique et en partie utilisée. Ce fait de la possibilité de changer à son gré la qualité d'une énergie fait comprendre pourquoi, du moins au point de vue pratique, une erreur sur la qualification d'une énergie est sans importance. Ainsi, en admettant (n° 2) que l'énergie d'un gaz sous pression soit cinétique dans son essence première, il est certain que, pratiquement, elle se manifeste à nous par une pression seule mesurable et, par suite, sous forme d'énergie potentielle. Donc, si elle était cinétique d'abord, la seule présence des parois l'aurait transformée en énergie potentielle et, *pourvu que cette énergie soit égale à la première,* ce que nous verrons avoir lieu, il n'y a pas d'inconvénient à les prendre l'une pour l'autre.

L'objet de la théorie qui nous occupe est précisément l'étude des lois suivant lesquelles s'accomplit le double phénomène de la transformation de nature et de la transmission de l'énergie.

Principe de la conservation de l'énergie.

5. *Si un système matériel n'est en communication d'aucune sorte avec le monde extérieur, son énergie totale est invariable.*

En effet, un pareil système n'est soumis qu'à ses actions mutuelles. Soient V la fonction de ces forces et Σmv^2 la force vive du système à l'instant quelconque t; soient V_0 et Σmv_0^2 les valeurs de ces mêmes quantités à un autre instant quelconque t_0. Le théorème des forces vives appliqué à l'intervalle de temps $t - t_0$ donne

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = V - V_0.$$

Mais, si Π et Π_0 représentent l'énergie potentielle du système aux deux instants t et t_0, on a (n° 2)

$$V = C - \Pi,$$
$$V_0 = C - \Pi_0,$$

C étant une constante égale au maximum de V; d'où

$$V - V_0 = \Pi_0 - \Pi$$

et, par suite

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + \Pi = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \Pi_0 = \text{const.}$$

Ainsi, supposons un pendule de poids P maintenu en repos par un fil, à une hauteur h au-dessus de son point le plus bas ou, pour être conforme à notre définition de l'énergie potentielle d'un système matériel, envisageons le système matériel formé par le pendule et la terre, en admettant :

1° Que ce système ne subit aucune action sensible du dehors;

2° Que la terre et, par suite, le point d'attache du fil soient fixes dans l'espace.

Lorsque le système passe de son état actuel à l'état d'équilibre stable, comme la terre reste fixe, le travail des actions mutuelles se réduit à celui du poids du pendule. Ainsi, au début, l'énergie totale du système, énergie potentielle, est (n° 2) Ph.

Si on rend le pendule libre et qu'il descende d'une

hauteur z, l'énergie potentielle du système ne sera plus que

$$P(h - z),$$

et si v est la vitesse du pendule à cet instant, et, par suite, $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$ son énergie cinétique, l'énergie totale du système sera

$$P\left(h - z + \frac{v^2}{2g}\right) = Ph,$$

puisque

$$v^2 = 2gz.$$

Corollaire. — Si on considère le système matériel formé par l'univers, il n'est en communication avec aucun autre système. Donc, son énergie totale est immuable. Il est aussi impossible de créer ou de détruire de l'énergie, qu'il l'est de créer ou de détruire de la matière. Tout ce que nous pouvons faire, c'est de transformer de l'énergie cinétique en énergie potentielle, ou *vice versa*, ou d'en transmettre d'une partie de l'univers à une autre, mais sans modifier la quantité totale primitivement existante.

Application à un système matériel quelconque; le théorème des forces vives.

6. *Quelles que soient les conditions dans lesquelles un système matériel est placé vis-à-vis du reste de l'univers, l'accroissement de son énergie pendant un intervalle de temps quelconque se compose :*

1° *De l'énergie qu'il a reçue du dehors, c'est-à-dire qui lui a été communiquée sous forme de chaleur, d'électricité, etc., par l'ensemble des corps avec lesquels il peut échanger de l'énergie;*

2° *Du travail qu'il a reçu du dehors, c'est-à-dire du travail des forces extérieures qui le sollicitent.*

En effet, en vertu du principe de la conservation de l'énergie, toute énergie gagnée par un système matériel quelconque (S) est nécessairement empruntée au système (S_1) formé par l'ensemble des autres corps de l'univers (pratiquement, on n'aura pas à considérer ceux qui n'exercent pas d'action sensible).

Or l'énergie fournie par ce dernier système comprend :

1° Celle fournie directement sous forme de chaleur, d'électricité, etc., par les corps extérieurs avec lesquels le système donné peut échanger des énergies;

2° Le travail des forces extérieures agissant sur le système donné, puisque ces forces sont exercées par tout ou partie des corps du système extérieur.

La proposition est donc établie.

Soient $\Delta\mathcal{E}$ l'accroissement de l'énergie totale du système donné pendant un intervalle de temps quelconque, $\Delta\eta$ la quantité d'énergie qui lui est fournie par l'ensemble des corps avec lesquels il peut échanger de l'énergie sous forme de chaleur, d'électricité, etc. Soient enfin F l'une des forces extérieures agissant sur le système donné et $\Sigma\mathcal{T}F$ la somme de leurs travaux pendant un intervalle de temps quelconque. On aura

$$(1) \qquad \Delta\mathcal{E} = \Delta\eta + \Sigma\mathcal{T}F \text{ [1]}.$$

Corollaire I. — On peut encore dire que :

1° *L'énergie fournie à un système matériel par les*

(1) Si l'on appelait $\mathcal{E}_1$ l'énergie du système extérieur, $\Delta\mathcal{E}_1$ son accroissement et F_1 l'une des réactions exercées par le système donné sur les corps extérieurs, on aurait, comme il est aisé de le voir,

$$\Delta\eta_1 = -(\Delta\mathcal{E}_1 - \Sigma\mathcal{T}F_1).$$

corps avec lesquels il peut échanger de l'énergie est égale à l'accroissement d'énergie du système diminuée *du travail des forces extérieures qui le sollicitent.*

2° *Si le système n'agit mécaniquement sur le dehors que par des corps solides en contact ou reliés par des liens rigides, l'énergie qui lui est fournie est égale à l'accroissement de son énergie* augmentée *du travail extérieur qu'il accomplit.*

De la dernière équation, on tire

$$(2) \qquad \Delta\tau_{\iota} = \Delta\mathcal{E} - \Sigma\mathfrak{G}F$$

qui établit l'énoncé 1°.

Pour établir le second, observons que les forces extérieures F qui agissent sur un système matériel sont les actions que les corps extérieurs exercent sur le système. La somme de leurs travaux est donc le travail *reçu* ou *consommé* par le système. Au contraire, le travail des réactions que les corps du système exercent sur les corps extérieurs est le travail extérieur *produit* ou *accompli* par le système (ces travaux pouvant d'ailleurs l'un et l'autre être positifs ou négatifs).

Ainsi, si un piston d'un cylindre vertical soulève un corps grave qu'il porte, le travail qu'il accomplit est celui de la pression verticale ascendante qu'il exerce sur le corps grave, travail positif; celui qu'il reçoit ou consomme est celui négatif de la pression que le corps exerce sur lui. Ici, ces deux travaux sont égaux et de signes contraires. Cela arrive toutes les fois que le système matériel considéré n'agit au dehors qu'à l'aide de corps solides en contact ou reliés par des liens rigides.

Alors le travail accompli est égal à — $\Sigma\mathfrak{G}F$, ce qui établit l'énoncé 2°. Mais il est bon d'observer que l'énoncé 1° est seul général.

Corollaire. — Si le système matériel n'est pas en communication d'énergie calorifique ou électrique avec le dehors, en sorte que $\Delta\eta = 0$, l'équation devient

$$\Delta \mathcal{E} = \Sigma \mathfrak{T} F,$$

qui est l'expression du théorème des forces vives, tel qu'on le considère habituellement en Mécanique. Car

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2} \Sigma m v^2 + \Pi = \tfrac{1}{2} \Sigma m v^2 + C - V,$$
$$\Delta \mathcal{E} = \tfrac{1}{2} (\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2) - (V - V_0).$$

Éléments qui définissent l'état d'un système matériel. Cycles.

7. Nous dirons que l'état d'un système matériel est défini à un certain instant, lorsqu'on se donne, à cet instant :

1° Les positions des diverses parties du système;

2° Leur état calorifique représenté par leurs températures;

3° Leur état électrique représenté par les tensions de l'électricité statique qui peut s'y trouver et par les grandeurs, directions et sens des courants électriques qui peuvent y passer;

4° Leur état magnétique représenté par les grandeurs, directions et sens des moments magnétiques qui peuvent s'y exercer.

Et nous dirons qu'un système matériel décrit un *cycle* lorsque, parti d'un certain état, il y revient en y acquérant la même force vive.

Application à un cycle.

8. Théorème. — 1° *Quelles que soient les conditions dans lesquelles un système matériel est placé vis-à-vis*

du reste de l'univers, la quantité totale d'énergie qu'il consomme pendant qu'il décrit un cycle est égale et de signe contraire au travail des forces extérieures qui le sollicitent;

2° *S'il n'agit au dehors que par des corps solides en contact ou reliés par des liens rigides, la quantité d'énergie qu'il consomme pendant un cycle est égale et de même signe que le travail extérieur qu'il accomplit.*

Pour démontrer cette importante proposition, il est bon de mettre l'énergie totale $\mathcal{E}$ du système matériel donné qui entre dans l'équation (2) sous forme plus explicite. Cette énergie est la somme des énergies cinétique et potentielle du système, soit

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 + \Pi$$

Mais dans l'énergie cinétique $\Sigma \frac{1}{2} m v^2$ il faut comprendre non seulement celle due aux vitesses *sensibles* des points du système, mais aussi celle due aux vitesses des mouvements insensibles ou stationnaires qui peuvent être dues à la chaleur, aux courants électriques, peut-être même au magnétisme ou à l'électricité statique. Soit w l'une des vitesses sensibles et $\Sigma \frac{1}{2} m w^2$ l'énergie cinétique correspondante; désignons en bloc par W tout le reste de l'expression de $\mathcal{E}$, en sorte que cette expression devient

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\Sigma m w^2 + W, \tag{3}$$

W étant une quantité qui dépend non seulement des positions des points du système, mais, suivant les cas, de tout ou partie des autres grandeurs qui définissent son état (n° 7).

D'après cela, si un système décrit un cycle, son énergie $\mathcal{E}$ reprend la même valeur.

Donc, si on applique l'équation (2) à un cycle, d'où $\Delta\mathcal{E} = 0$, elle devient

$$\Delta\eta = -\Sigma\mathfrak{G}F,$$

qui établit la proposition 1° et, en se reportant au raisonnement du corollaire du n° 6, la proposition 2° s'ensuit.

Équivalent mécanique de la chaleur.

9. Supposons que l'électricité et le magnétisme n'interviennent pas et qu'on fasse décrire à un système matériel soumis à des forces extérieures et intérieures un cycle en lui communiquant simplement (ou lui soustrayant, suivant les besoins) de la chaleur. On peut mesurer le nombre de calories qu'on lui a fournies et aussi le travail des forces extérieures qu'on fait agir sur lui, et comparer les résultats. On reconnaît ainsi que, quelles que soient les conditions dans lesquelles on fait l'expérience, le rapport du travail produit à la chaleur fournie est une même constante (1). Cette constante se nomme l'*équivalent mécanique de la chaleur*. Elle est d'environ 424^{kg}, c'est-à-dire qu'une calorie a une énergie de 424^{kg}, ou peut produire, quelles que soient les conditions où on la place, un travail de 424^{kg}; ou inversement 1^{kg} de travail exige $\frac{1}{424}$ de calorie. Cette dernière fraction se nomme l'*équivalent calorifique du travail.*

On voit, d'après cela, que l'on peut exprimer à volonté le travail mécanique en calories ou la chaleur en kilogrammètres, puisqu'à un travail donné répond toujours une quantité de chaleur proportionnelle et *vice versa.*

(1) On peut aussi considérer ce fait comme résultant du principe même de la conservation de l'énergie, c'est-à-dire de l'impossibilité du mouvement perpétuel, d'après un raisonnement classique.

Supposons toujours qu'un système matériel se transforme sous les seules influences des forces extérieures et intérieures et de la chaleur. Soit ΔQ la quantité de chaleur qui lui est fournie pendant un intervalle de temps quelconque. L'énergie correspondante, en désignant par E l'équivalent mécanique de la chaleur, est $\Delta\eta' = E\Delta Q$ et l'équation (2) devient

$$E\Delta Q = \Delta\mathcal{E} - \Sigma\mathfrak{G}F$$

ou

$$(4)\qquad \Delta Q = \frac{1}{E}\Delta\mathcal{E} - \frac{1}{E}\sum\mathfrak{G}F.$$

Ainsi :

Si un système matériel se transforme sous les seules influences de la chaleur et des forces extérieures, la quantité de chaleur qui lui est fournie du dehors pendant un intervalle de temps quelconque est égale à l'accroissement correspondant de son énergie exprimée en calories, diminuée du travail des forces extérieures qui le sollicitent, exprimé également en calories.

Supposons que les mouvements du système soient assez lents pour qu'on puisse négliger la force vive sensible; alors son énergie $\mathcal{E}$ se réduit à la fonction W, qui ne dépend, dans ce cas, que des positions et températures des divers points du système, en sorte que

$$\Delta Q = \frac{1}{E}(\Delta W - \Sigma\mathfrak{G}F).$$

Supposons que le système matériel se réduise à un corps homogène de volume v dont tous les points soient, à chaque instant, à une même température T et que les forces extérieures se réduisent à une pression uni-

forme p exercée à sa surface, en sorte que

$$\Sigma \mathfrak{T}F = -\int p\,dv;$$

on aura

$$\Delta Q = \frac{1}{E}(\Delta W + \int p\,dv)$$

et, pour un intervalle de temps infiniment petit,

$$dQ = \frac{1}{E}(dW + p\,dv).$$

Ici, l'état du corps est, à chaque instant, défini par la connaissance des trois grandeurs p, v, T, entre lesquelles il existe d'ailleurs une relation qui, pour les gaz, résulte des lois de Mariotte et de Guy-Lussac combinées; pour d'autres corps, peut-être plus complexe, en sorte que W peut toujours être considéré comme une fonction de deux quelconques de ces trois grandeurs prises pour seules variables indépendantes.

L'énergie exprimée en calories $\frac{W}{E}$ est souvent désignée sous le nom de *chaleur interne*, de sorte que l'équation ci-dessus écrite

$$\Delta \frac{W}{E} = \Delta Q - \frac{1}{E}\int p\,dv$$

montre que, si l'on fournit une certaine quantité (positive ou négative) de chaleur ΔQ *à un corps, l'accroissement de chaleur interne qui en résulte est égal à la chaleur fournie* ΔQ, *diminuée du travail extérieur accompli par le corps, ce travail étant exprimé en calories.*

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES COURBES;

PAR M. G. HUMBERT,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Principes fondamentaux.

1. Dans un travail récent, publié au *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* nous avons démontré, par des considérations fondées sur le théorème d'Abel, un certain nombre de propriétés métriques des courbes algébriques : le but de cette Note est d'exposer une méthode élémentaire permettant d'arriver simplement à quelques-unes de ces propriétés, et se prêtant aisément à un grand nombre d'applications nouvelles.

Toute la théorie qui va être exposée repose sur les principes suivants :

Soit, en coordonnées homogènes $f(x, y, z) = 0$, une courbe algébrique plane quelconque de degré n; considérons un faisceau ponctuel de courbes de degré m, $F - u\varphi = 0$, où u désigne un paramètre variable. Une courbe de faisceau coupe la courbe fixe $f = 0$ en mn points, de coordonnées (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2), ... Désignons par $\frac{Q(x, y, z)}{V(x, y, z)}$ une fonction rationnelle de degré zéro en x, y, z, c'est-à-dire le quotient de deux polynômes homogènes, Q et V de même degré, et proposons-nous d'étudier la somme des valeurs que prend cette fonction aux points communs à la courbe $f = 0$ et à une des courbes du faisceau $F - u\varphi = 0$. Cette somme, dont l'expression est

$$\sigma = \frac{Q(x_1, y_1, z_1)}{V(x_1, y_1, z_1)} + \frac{Q(x_2, y_2, z_2)}{V(x_2, y_2, z_2)} + \ldots,$$

est une fonction symétrique des coordonnées des points communs aux courbes $f=0$, $F-u\varphi=0$; elle s'exprime rationnellement en fonction des coefficients qui figurent dans l'équation de ces courbes; c'est donc, puisque le coefficient u est seul variable, une fonction rationnelle de u.

Que faut-il pour qu'elle soit constante, c'est-à-dire indépendante de u? Il est clair qu'il faut et qu'il suffit qu'elle ne devienne infinie pour aucune valeur, finie ou infinie de u. Or, si nous considérons les points fixes communs aux courbes $f=0$, $V=0$, nous voyons que la somme σ ne peut devenir infinie que si la courbe correspondante du faisceau $F-u\varphi=0$ passe par un de ces points, et, quand cette circonstance se présente, σ est généralement infini. Pour qu'il en soit autrement, il est *nécessaire* que deux ou plusieurs des termes de σ deviennent simultanément infinis, c'est-à-dire que la courbe $F-u\varphi=0$ considérée passe par deux ou plusieurs des points communs aux courbes $f=0$, $V=0$, ou bien touche en l'un d'eux la courbe $f=0$; mais rien ne prouve que cette condition nécessaire soit en même temps suffisante.

2. Il existe toutefois un cas particulier très étendu où l'on peut affirmer qu'elle est suffisante.

Supposons, pour fixer les idées, que les courbes $f=0$, $V=0$ ne soient tangentes entre elles en aucun de leurs points de rencontre, et que la courbe $Q=0$ ne passe par aucun de ces points; nous allons montrer que, si la courbe du faisceau $F-u\varphi=0$ qui passe par l'un d'eux touche en ce point la courbe $f=0$, la somme σ ne deviendra pas infinie pour la valeur correspondante de u.

Pour le démontrer, admettons que les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe $f=0$, dans le voisinage

du point considéré, soient des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire t; soit t_0 la valeur du paramètre t qui correspond à un point où les courbes $V = 0$, $f = 0$ se rencontrent, et supposons qu'en ce point la courbe $F - u_0\varphi = 0$ soit tangente, et plus généralement ait un contact d'ordre μ, avec la courbe $f = 0$. Si nous donnons au paramètre u une valeur voisine de u_0, $u_0 + h$, la courbe $F - (u_0 + h)\varphi = 0$ coupera $f = 0$ en $\mu + 1$ points voisins du point considéré; soient $t_0 + \theta_1$, $t_0 + \theta_2, \ldots, t_0 + \theta_{\mu+1}$ les valeurs du paramètre t qui correspondent respectivement à ces $\mu + 1$ points. Il y aura, dans la somme σ, $\mu + 1$ termes qui tendront vers l'infini quand h tendra vers zéro; ce seront les termes de la somme

$$\sigma' = \frac{Q}{V}(t_0 + \theta_1) + \frac{Q}{V}(t_0 + \theta_2) + \ldots,$$

en désignant par $Q(t_0 + \theta)$ la valeur que prend le polynôme $Q(x, y, z)$, quand on y remplace x, y, z par les coordonnées du point de la courbe $f = 0$, dont le paramètre est $t_0 + \theta$.

Or, on a

$$V(t_0 + \theta_i) = V(t_0) + \theta_i V'_{t_0} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu + 1);$$

$V(t_0) = 0$, $V'_{t_0} \gtrless 0$, puisque la courbe $V = 0$ passe par le point t_0 sans y toucher la courbe $f = 0$; de même, on a

$$Q(t_0 + \theta_i) = Q(t_0) + \ldots.$$

$Q(t_0)$ n'est pas nul par hypothèse, puisque la courbe $Q = 0$ ne passe pas par le point t_0. Il en résulte que, pour montrer que σ' a une limite finie pour $h = 0$, il suffit de le démontrer pour la somme

$$\sigma'' = \frac{Q(t_0)}{V'(t_0)}\left[\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \ldots + \frac{1}{\theta_{\mu+1}}\right].$$

Or, si nous posons $G = F - u_0\varphi$, les courbes $G = 0$ et $f = 0$ ont un contact d'ordre μ au point t_0; on a donc, d'après la théorie générale du contact,

$$(1)\qquad \begin{cases} G(t_0) = 0, & G'(t_0) = 0, \quad \ldots, \\ G^{(\mu)}(t_0) = 0, & G^{(\mu+1)}(t_0) \gtrless 0. \end{cases}$$

Écrivons maintenant que les points $t_0 + \theta_i$ sont sur la courbe $F - (u_0 + h)\varphi = 0$, c'est-à-dire $G - h\varphi = 0$. Il vient

$$G(t_0 + \theta_i) - h\varphi(t_0 + \theta_i) = 0,$$

d'où, en développant par la formule de Taylor et tenant compte des relations (1),

$$(2)\qquad \frac{1}{1.2\ldots\mu+1}\theta_i^{\mu+1} G^{(\mu+1)}(t_0) - h\varphi(t_0) = 0.$$

On voit ainsi que $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\mu+1}$ sont les racines d'une équation binôme

$$\theta^{\mu+1} = Ah;$$

par conséquent la somme de leurs inverses est nulle, et σ'' ne devient pas infini quand h tend vers zéro.

Ce raisonnement suppose toutefois que $\varphi(t_0)$ n'est pas nul. Or $\varphi(t_0)$ ne peut être nul que dans deux cas; on a, en effet,

$$F(t_0) - u_0\varphi(t_0) = 0,$$

et la condition $\varphi(t_0) = 0$ entraînerait, soit $u_0 = \infty$, soit $F(t_0) = 0$. Si u_0 était infini, on n'aurait eu qu'à écrire l'équation du faisceau sous la forme $\frac{1}{u}F - \varphi$, et le paramètre $\frac{1}{u}$ n'aurait plus été infini pour la courbe considérée.

Il ne reste donc que l'hypothèse $F(t_0) = 0$: les deux

courbes $F = 0$, $\varphi = 0$ passent alors par le point t_0 de la courbe $f = 0$.

En ce cas, on peut supposer que les deux courbes $F = 0$, $\varphi = 0$ ont avec $f = 0$, au point t_0, un contact du même ordre, ν; s'il en était autrement, il suffirait de changer u en $\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$ pour se trouver dans notre hypothèse.

Supposons alors que la courbe $F - u_0 \varphi = 0$, ou $G = 0$, ait avec $f = 0$, au point t_0, un contact d'ordre μ, μ étant supérieur à ν.

On aura toujours

$$\sigma'' = \frac{Q(t_0)}{V'(t_0)} \left[\frac{1}{\theta_1} + \ldots + \frac{1}{\theta_{\mu+1}} \right]$$

et l'équation $G(t_0 + \theta_i) - h\varphi(t_0 + \theta_i)$ deviendra

$$\frac{1}{1.2\ldots\mu+1} \theta_i^{\mu+1} G^{(\mu+1)}(t_0) - \frac{h}{1.2\ldots\nu+1} \theta_i^{\nu+1} \varphi^{(\mu+1)}(t_0) = 0.$$

Cette équation donne $\nu + 1$ valeurs nulles pour θ, ce qui était à prévoir, puisque toutes les courbes $F - u\varphi$ ont avec $f = 0$, au point t_0, un contact d'ordre ν. Si l'on se débarrasse, dans la somme

$$\sum \frac{Q}{V},$$

des termes qui correspondent aux points *fixes* communs à la courbe $f = 0$ et aux courbes du faisceau, il suffira, dans σ'', de conserver les termes $\frac{1}{\theta}$ qui sont les racines de l'équation

$$\frac{1}{(\mu+1)!} G^{(\mu+1)}(t_0).\theta^{\mu-\nu} - \frac{h}{(\nu+1)!} \varphi^{(\mu+1)}(t_0) = 0.$$

La somme des inverses de ces racines sera nulle si l'on a $\mu - \nu \geqq 2$; c'est-à-dire $\mu \geqq \nu + 2$. Il faudra donc que la

courbe $F - u_0 \varphi = 0$ ait avec $f = 0$, au point t_0, un contact d'un ordre supérieur de deux unités à l'ordre du contact de $f = 0$ avec $F = 0$ ou $\varphi = 0$ en ce point.

3. De toute cette discussion, qu'il serait facile de compléter en étudiant le cas où la courbe $V = 0$ serait tangente à la courbe $f = 0$, au point t_0, résulte le théorème fondamental suivant :

Théorème. — *La somme des valeurs que prend une fonction rationnelle,* $\frac{Q}{V}(x, y, z)$, *homogène et de degré zéro, aux points variables communs à une courbe algébrique,* $f = 0$, *et à chacune des courbes d'un faisceau, reste constante si les courbes du faisceau qui passent respectivement par les points d'intersection des courbes* $f = 0$, $V = 0$, *rendant la fonction* $\frac{Q}{V}$ *infinie, ont, en chacun de ces points, avec la courbe* $f = 0$, *un contact d'un ordre au moins égal à la différence entre les ordres des contacts de la courbe* $f = 0$ *avec les courbes* $V = 0$ *et* $Q = 0$ *au point considéré.*

Si la courbe $Q = 0$ ne passe pas par ce point, on devra, pour appliquer le théorème, regarder l'ordre de son contact avec $f = 0$ comme égal à -1 : il suffira alors que la courbe du faisceau, passant par le point considéré, y ait, avec la courbe $f = 0$, un contact d'ordre plus élevé que l'ordre du contact de $f = 0$ avec $V = 0$.

Enfin, si toutes les courbes du faisceau passent par un point commun à $f = 0$, $V = 0$, et ont en ce point avec $f = 0$ un contact d'ordre ν, on devra, pour appliquer le théorème, regarder comme courbe du faisceau passant par le point celle qui a en ce point avec $f = 0$ un contact d'ordre $\nu + 1$.

Il resterait, pour ne laisser aucune hypothèse de côté,

à examiner le cas où quelques-uns des points communs aux courbes $V = 0$ et $f = 0$ seraient des points multiples de cette dernière; cette étude demanderait des considérations d'un ordre un peu plus élevé; nous dirons seulement que l'existence d'un point multiple à m branches séparées n'introduit aucune modification dans le théorème; on le considérera comme formé par la réunion de m points distincts, correspondant chacun à une des branches.

4. *Remarque I.* — Nous avons admis, dans ce qui précède, que les courbes sécantes formaient un faisceau $F - u\varphi = 0$.

Le théorème s'applique, ainsi que la démonstration, si les courbes sécantes ont une équation de la forme $F(x, y, z, u) = 0$, F étant une fonction algébrique de x, y, z, u.

On devra seulement supposer que F'_u n'est pas nul dans l'équation

$$\frac{1}{1.2\ldots(\mu+1)} F^{(\mu+1)}(t_0).\theta_i^{\mu+1} + hF'_u = 0,$$

qui remplace l'équation (2). Cela revient à dire qu'aucun des points communs aux courbes $f = 0$, $V = 0$ n'est sur l'enveloppe des courbes $F(x, y, z, u) = 0$.

Nous ne ferons pas usage, dans cette Note, de la proposition ainsi généralisée, qui se prête moins bien aux applications que le théorème primitif.

5. *Remarque II.* — On peut supposer que Q et V dépendent non seulement de x, y, z, mais aussi de u. On aura toujours

$$Q(t_0 + \theta_i, u_0 + h) = Q(t_0, u_0) + \ldots$$

et

$$V(t_0 + \theta_i, u_0 + h) = V(t_0, u_0) + \theta_i V'_{t_0} + hV'_{u_0}.$$

Mais h est infiniment petit par rapport à θ_i, puisque $\theta_i^{\mu+1}$ est de l'ordre de h; il en résulte que $V(t_0+\theta_i, u_0+h)$ se réduit à $\theta_i V_{t_0}$, et la démonstration faite plus haut est applicable.

6. Corollaire I. — Observons que, d'après le théorème du n° 3, la somme des valeurs de $\frac{Q}{V}$ aux points communs à $f=0$ et $F-u\varphi=0$ reste constante si une *même* courbe du faisceau $F-u\varphi=0$ passe par tous les points communs à $f=0$ et $V=0$, en satisfaisant, en chacun de ces points, aux conditions énoncées.

En particulier, si $V=0$ ne touche $f=0$ en aucun point, la somme des valeurs de $\frac{Q}{V}$ restera constante si, parmi les courbes du faisceau sécant, il en est une qui touche la courbe $f=0$ en tous les points de cette courbe où $\frac{Q}{V}$ devient infinie.

7. Corollaire II. — Un autre cas particulier du théorème fondamental nous sera utile dans les applications.

Supposons que les points de la courbe $f=0$, où la fonction rationnelle $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ de degré zéro devient infinie, soient tous des points d'inflexion de f, et que la fonction $\frac{Q}{V}$ soit infinie du premier ordre en chacun de ces points ([1]).

Prenons pour faisceau sécant le faisceau des courbes

([1]) Le sens de cette expression est le suivant : Si $V=0$ a un contact d'ordre $\mu-1$ avec $f=0$ au point considéré, il faut que $Q=0$ ait avec cette dernière courbe, au même point, un contact d'ordre $\mu-2$.

qui coupent respectivement $f = 0$ aux points de contact des tangentes communes à cette courbe et à chacune des courbes d'un faisceau *tangentiel* donné.

Je dis que la somme des valeurs de la fonction $\frac{Q}{V}$, aux points communs à $f = 0$ et à chacune des courbes du faisceau ponctuel considéré, demeure constante.

Il suffit, pour cela, de montrer que la courbe du faisceau ponctuel qui passe par un des points d'inflexion donnés sur la courbe $f = 0$ touche cette courbe en ce point, ce qui est évident, puisque la tangente d'inflexion correspondante doit être comptée deux fois parmi les tangentes communes à la courbe $f = 0$ et à la courbe du faisceau tangentiel qui touche cette droite. Donc :

Soit $\frac{Q}{V}(x, y, z)$ une fonction rationnelle quelconque, de degré zéro, ne devenant infinie, sur une courbe algébrique $f(x, y, z) = 0$, qu'en des points d'inflexion de cette courbe, et étant infinie du premier ordre seulement en ces points.

La somme des valeurs que prend cette fonction aux points de contact de la courbe $f = 0$ et des tangentes communes à cette courbe et à une autre courbe algébrique de classe donnée reste fixe quand cette dernière varie d'une manière quelconque.

Nous allons faire maintenant quelques applications du théorème fondamental et de ses deux corollaires.

Centres des moyennes distances.

8. Soit $\frac{Q}{V} = \frac{x}{z}$; la somme des valeurs de $\frac{Q}{V}$ sera égale à mn fois l'abscisse du centre des moyennes distances des points communs à la courbe $f = 0$ et aux courbes

$F - u\varphi = o$. Nous avons donc les propositions suivantes, en observant que la courbe $V = o$ est la droite de l'infini :

I. *Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique quelconque et à chacune des courbes d'un faisceau reste fixe, si chaque asymptote de la courbe est asymptote à l'une des courbes du faisceau.*

II. *Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique quelconque et à chacune des courbes d'un faisceau reste fixe si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette pour asymptotes toutes les asymptotes de la première courbe.*

En particulier, cette dernière proposition s'applique si l'une des courbes du faisceau comprend la droite de l'infini comptée deux fois, car cette courbe est bien tangente à la courbe fixe en tous les points à l'infini de cette dernière. Les courbes du faisceau sécant ont alors mêmes asymptotes. Donc :

III. *Le centre des moyennes distances des points communs à deux courbes algébriques reste fixe si l'une de ces courbes varie en restant asymptote à elle-même.*

Ce dernier théorème est dû à Liouville; un cas particulier intéressant est le suivant :

Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique et à une série de cercles concentriques est fixe.

On peut remplacer la courbe par le système de ses asymptotes sans changer le centre des moyennes distances dont il s'agit; par suite :

Le centre des moyennes distances des points com-

muns à un cercle et à une courbe algébrique est aussi celui des projections du centre du cercle sur les asymptotes de la courbe.

9. Les applications des trois propositions précédentes peuvent être variées presque indéfiniment; nous nous bornerons à quelques exemples particulièrement simples.

Menons à la courbe $f=0$ les tangentes parallèles à une même direction; les points de contact sont sur les courbes $f'_x+uf'_y=0$. La courbe de ce faisceau, qui passe par un point à l'infini sur $f=0$, touche en ce point cette dernière courbe, car l'asymptote correspondante compte pour deux dans le nombre des tangentes qu'on peut mener à $f=0$ parallèlement à sa direction.

On est donc placé dans le cas de la proposition I, et l'on obtient ce théorème bien connu, dû à Chasles :

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes menées à une courbe algébrique parallèlement à une même direction reste fixe quand cette direction varie.

10. Dans le cas où la courbe $f=0$ a toutes ses asymptotes d'inflexion, la droite $z=0$ ne rencontre cette courbe qu'en des points d'inflexion, et l'on peut appliquer le corollaire II du théorème fondamental. Donc :

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes menées par un point quelconque du plan à une courbe algébrique ayant toutes ses asymptotes d'inflexion est un point fixe.

Ce point est aussi le centre des moyennes distances des points de contact, avec la courbe considérée, des

tangentes communes à cette courbe et à une courbe algébrique quelconque.

Ces deux propositions s'appliquent à un grand nombre de courbes connues; nous citerons en particulier le folium de Descartes, la lemniscate de Bernoulli, les courbes dont l'équation polaire est $\rho^n = A \cos n\omega$, où n est un entier positif au moins égal à 2, etc.

11. Le cas des courbes du troisième degré à point double, ayant leurs trois asymptotes d'inflexion, est particulièrement simple. Si l'on mène des tangentes à la courbe par le point double, les points de contact sont tous confondus en ce point, qui est dès lors le centre des moyennes distances fixe des théorèmes précédents. En particulier, on voit que :

Si, par un point a d'une cubique à point double, ayant ses trois asymptotes d'inflexion, on mène à la courbe les deux tangentes dont les points de contact, b et c diffèrent de a, la droite qui joint a au milieu du segment bc passe par le point double, qui la partage en deux parties égales.

Ce théorème pourrait servir de base à une étude géométrique des cubiques dont il s'agit.

De même, dans le cas de la lemniscate, le centre des moyennes distances des points considérés est aussi le point double à distance finie : il suffit, pour le voir, d'imaginer que le point par lequel on mène les tangentes coïncide avec ce point double. On peut donc dire que :

Le centre des moyennes distances des points de contact d'une lemniscate avec les tangentes communes à cette courbe et à une courbe algébrique quelconque est le centre de la lemniscate.

Centres des moyennes harmoniques.

12. Poncelet appelle centre des moyennes harmoniques de n points $A_1, A_2, \ldots$, par rapport à une droite Δ, un point qui jouit de la propriété suivante : Soit D une droite quelconque passant par ce point. Appelons d_1, $d_2, \ldots$ les distances de $A_1, A_2, \ldots$ à cette droite et δ_1, $\delta_2, \ldots$ les distances de ces points à la droite fixe Δ : on aura

$$\sum \frac{d_i}{\delta_i} = 0.$$

Il en résulte que, si l'on prend un triangle de référence dont le côté $z = 0$ soit la droite Δ, le centre des moyennes harmoniques sera défini par les relations

$$n\frac{x}{z} = \sum \frac{x_i}{z_i}, \qquad n\frac{y}{z} = \sum \frac{y_i}{z_i},$$

x_i, y_i, z_i étant les coordonnées homogènes du point A_i.

On peut faire pour le centre des moyennes harmoniques la même théorie que pour celui des moyennes distances : il suffit de transformer les théorèmes précédents par perspective, en faisant correspondre la droite de l'infini de l'ancien plan avec la droite Δ du nouveau; aussi n'insisterons-nous sur ce point que dans le cas spécial des courbes du troisième ordre.

On sait qu'une cubique a neuf points d'inflexion, situés trois à trois en ligne droite. On appelle *triangle inflexionnel* un triangle dont chaque côté passe par trois points d'inflexion, aucun des sommets ne coïncidant avec un tel point. Il y a quatre triangles inflexionnels.

Il résulte de la proposition du n° 10 que *si l'on mène à une cubique des tangentes par un point quelconque de son plan, le centre des moyennes harmoniques des*

points de contact par rapport à l'un des côtés d'un triangle inflexionnel est un point fixe.

Il est intéressant de déterminer ce point fixe.

Mettons l'équation de la cubique sous la forme canonique

(3) $$x^3+y^3+z^3+6\lambda xyz=0.$$

Les droites $x=0$, $y=0$, $z=0$ sont les trois côtés d'un triangle inflexionnel.

Menons à la cubique des tangentes par le point $x=0$, $y=0$; les six points de contact seront sur la conique

(4) $$z^2+2\lambda xy=0.$$

Le centre des moyennes harmoniques de ces six points, par rapport à la droite $z=0$, sera déterminé par les relations

$$6\frac{x}{z}=\sum\frac{x_i}{z_i},\qquad 6\frac{y}{z}=\sum\frac{y_i}{z_i},\qquad (i=1,2,\ldots,6).$$

Pour évaluer $\sum\frac{x_i}{z_i}$, éliminons y entre les équations (3) et (4); il vient

$$8\lambda^3x^6-18\lambda^3x^3z^3-z^6=0;$$

d'où, puisque le terme en x^5 manque,

$$\sum\frac{x_i}{z_i}=0.$$

On a de même

$$\sum\frac{y_i}{z_i}=0$$

et, pour les coordonnées du point cherché,

$$\frac{x}{z}=0,\qquad \frac{y}{z}=0;$$

c'est-à-dire

$$x=0,\qquad y=0.$$

13. On peut donc compléter ainsi le théorème précédent :

Si l'on mène à une cubique des tangentes par un point quelconque de son plan, le centre des moyennes harmoniques des six points de contact, par rapport à un côté d'un triangle inflexionnel, coïncide avec le sommet opposé de ce triangle.

De même, et plus généralement :

Le centre des moyennes harmoniques, par rapport à un côté d'un triangle inflexionnel, des points de contact de la cubique et des tangentes communes à cette courbe et à une courbe algébrique quelconque, coïncide avec le sommet opposé du triangle considéré.

Polaires.

14. Si l'on transforme par polaires réciproques la définition du centre des moyennes harmoniques de n points par rapport à un axe, on retombe sur une notion bien connue, en Géométrie, celle de la *polaire* d'un point par rapport à n droites. On connaît la définition de la polaire d'un point par rapport à une courbe; celle de la polaire d'un point, par rapport à un système de droites, est la même; rappelons-la en quelques mots. Si, par le point considéré O, on mène une sécante quelconque coupant la courbe aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et si l'on prend sur la droite le point M, tel que

$$\frac{n}{OM} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \ldots,$$

le point M décrit, quand la sécante tourne autour du point O, la polaire de ce point par rapport à la courbe.

En transformant, par réciprocité, les propriétés relatives aux centres des moyennes harmoniques, on obtient, en particulier, les théorèmes suivants :

La polaire d'un point fixe O, *par rapport aux tangentes communes à une courbe algébrique* C *et à chacune des courbes d'un faisceau tangentiel, est une droite fixe, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui touche la courbe* C *en tous les points de contact de cette courbe avec les tangentes qu'on peut lui mener du point* O.

La polaire du point O *reste également fixe si toutes les courbes du faisceau ont les mêmes tangentes issues de* O, *et les mêmes points de contact avec ces tangentes.*

Exemple. — La polaire du centre d'un cercle par rapport aux tangentes communes à ce cercle et à une courbe algébrique quelconque reste fixe si le rayon du cercle varie, le centre restant fixe.

15. Aux courbes ayant leurs asymptotes d'inflexion correspondent, par réciprocité, des courbes telles que les tangentes qu'on peut leur mener d'un point du plan soient toutes de rebroussement; le théorème du n° 10 se transforme ainsi :

Si toutes les tangentes qu'on peut mener à une courbe par un point de son plan sont des tangentes de rebroussement, la polaire de ce point par rapport aux tangentes menées à la courbe en ses points de rencontre avec une courbe algébrique quelconque est une droite fixe.

Ce théorème s'applique, en particulier, à l'hypocycloïde à trois rebroussements, aux développées des coniques, etc.

Propriétés de la lemniscate.

16. La lemniscate est une courbe du quatrième degré à trois points doubles; deux sont les points cycliques du plan, l'autre est le centre de la courbe; en chacun de ces points, les deux tangentes à la courbe sont d'inflexion. Il en résulte que, le centre étant pris pour origine, les trois droites $x+iy=0$, $x-iy=0$, $z=0$ ne coupent la courbe qu'en des points d'inflexion. Par conséquent, en appliquant le corollaire du n° 7, on voit que, si l'on mène les tangentes communes à la lemniscate et à une courbe quelconque de classe donnée, les fonctions symétriques suivantes des coordonnées x, y des points de contact de ces tangentes avec la lemniscate restent constantes :

$\sum \frac{x}{z}$, $\sum \frac{y}{z}$; nous avons déjà énoncé le théorème correspondant (n° 11);

$$\sum \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad \sum \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \sum \frac{y^2}{x^2+y^2};$$

$\sum \frac{x^2+y^2}{z^2}$; car $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ devient infini du premier ordre seulement aux deux points cycliques;

$\sum \frac{xz}{x^2+y^2}$, $\sum \frac{yz}{x^2+y^2}$; car $\sum \frac{xz}{x^2+y^2}$ devient infini, et du premier ordre seulement, à l'origine.

Pour interpréter ce dernier résultat, nous rappellerons une définition due à Laguerre,

Laguerre appelle *centre harmonique* d'un système de n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, par rapport à un pôle O, un point ainsi défini : sur les directions $OA_1, OA_2, \ldots,$ on porte des longueurs égales à $\frac{1}{OA_1}, \frac{1}{OA_2}, \ldots$ et on les compose comme des forces ; soit OR_1 la résultante.

Portons sur OR une longueur $OR_1 = \frac{n}{OR_1}$, le point R sera le centre harmonique. Si $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ sont ses coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires passant par O, on a

$$\frac{nxz}{x^2+y^2} = \sum \frac{x_i z_i}{x_i^2+y_i^2}, \qquad \frac{nyz}{x^2+y^2} = \sum \frac{y_i z_i}{x_i^2+y_i^2}.$$

Nous pouvons énoncer maintenant les propriétés suivantes :

Menons les tangentes communes à une lemniscate et à une courbe algébrique qui varie d'une manière quelconque, en conservant sa classe, et considérons les points de contact de la lemniscate avec un des systèmes de tangentes communes :

1° *Le centre des moyennes distances de ces points de contact reste fixe.*

2° *Le centre harmonique du centre de la lemniscate par rapport à ces points reste fixe.*

3° *La somme des carrés des distances de ces points au centre de la lemniscate reste fixe.*

4° *La somme des carrés des sinus ou des cosinus des angles que font les rayons vecteurs correspondants avec un des axes de la courbe reste fixe.*

Applications diverses.

17. Soit C une courbe algébrique; par un point M de son plan menons-lui des normales; soient P le pied de l'une d'elles, R le centre de courbure en P. Nous allons démontrer qu'on a, quand M varie,

$$\sum \frac{MP}{MR} = \text{const.}$$

la somme étant étendue à toutes les normales issues de M.

Soient, en effet, ν la longueur MP, ρ le rayon de courbure PR ; on a

$$\frac{MP}{MR} = \frac{\nu}{\nu - \rho}.$$

On va montrer d'abord que $\frac{\nu}{\nu - \rho}$ est une fonction rationnelle des coordonnées des points M et P.

Soient α et β les coordonnées de M; ξ et η celles de P. On a

$$\nu^2 = (\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2,$$

$$\rho^2 = \frac{[f_\xi'^2 + f_\eta'^2]^3}{H^2},$$

H étant un polynôme entier. Or, la normale MP passant par M, on a

$$\frac{\xi - \alpha}{f'_\xi} = \frac{\eta - \beta}{f'_\eta},$$

d'où

$$\nu^2 = \frac{(\xi - \alpha)^2}{f_\xi'^2} [f_\xi'^2 + f_\eta'^2]$$

et enfin

$$\frac{\nu}{\nu - \rho} = \frac{\xi - \alpha}{(\xi - \alpha) - f'_\xi \dfrac{f_\xi'^2 + f_\eta'^2}{H}},$$

ce qui est bien une fonction rationnelle. La valeur de cette fonction définit, d'ailleurs, d'une façon précise la quantité $\frac{MP}{MR}$. Cela posé, supposons que M décrive l'axe des x, on aura

$$\beta = 0,$$

$\frac{\nu}{\nu - \rho}$ sera fonction rationnelle de ξ, η et α. Il résulte de

TABLE DES MATIÈRES.

Novembre 1887.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE.

DÉCEMBRE 1887.

S'adresser, pour la rédaction,

à M. Brisse, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine),
ou à M. Rouché, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

Ce Recueil paraît chaque mois.

Par application de la loi du 7 avril 1879, tous les bureaux de poste de France, d'Algérie, de Belgique, de Danemark, d'Italie, de Norvège, des Pays-Bas, de Suède et de Suisse sont autorisés à recevoir les abonnements. L'éditeur des *Nouvelles Annales de Mathématiques* prend à sa charge la remise perçue par l'Administration, et il suffit de verser à un bureau de poste, sans frais supplémentaires, le montant de l'abonnement. (*Paris* : 15 fr. — *Départements et Union postale* : 17 fr. — *Autres pays* : 20 fr.).

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet,
Répétiteur à l'École Polytechnique,

ET

M. E. ROUCHÉ,
Examinateur de sortie à l'École Polytechnique,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* paraissent chaque mois et forment par an un volume in-8 de 38 feuilles, avec figures dans le texte. L'année 1888 est en cours de publication.

PREMIÈRE SÉRIE : 20 volumes in-8 (1842 à 1861)........... 300 fr.
Les tomes I à VII, X et XVI à XX (1842-1848, 1851, 1857-1861) ne se vendent pas séparément.
Les autres tomes de la première série se vendent séparément...... 15 fr.

DEUXIÈME SÉRIE : 20 volumes in-8 (1862 à 1881)............ 300 fr.
Les tomes I à III et V à VIII (1862 à 1869) ne se vendent pas séparément.
Les tomes suivants de la deuxième série se vendent séparément. 15 fr.

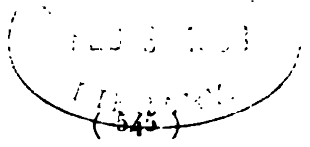
On peut se procurer l'une des Séries ou les deux Séries au moyen de payements mensuels de 30 *fr.*

La **TROISIÈME SÉRIE**, commencée en 1882, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages.

Les abonnements sont annuels et partent de janvier.

Prix pour un an (12 *numéros*) :

Paris..	15 fr.
Départements et Pays faisant partie de l'Union postale.......	17
Autres pays..	20



la *Remarque II* du n° 5, que la somme

$$\sum \frac{\nu}{\nu - \rho} = \sum \frac{1}{1 - \frac{\rho}{\nu}}$$

étendue aux points d'intersection des courbes

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi f'_\eta - \eta f'_\xi - \alpha f'_\eta = 0$$

sera constante, si, toutes les fois que la seconde passe par un point de $f = 0$ tel que $1 - \frac{\rho}{\nu}$ soit nul, elle touche en ce point la courbe $f = 0$. Or, si $1 - \frac{\rho}{\nu} = 0$, on a $\rho = \nu$, et le point M coïncide avec le centre de courbure R de la courbe en P; deux des normales menées à la courbe par M ont donc leur pied en P, et la courbe

$$\xi f'_\eta - \eta f'_\xi - \alpha f'_\eta = 0$$

touche au point P la courbe $f = 0$. Il en résulte bien que $\sum \frac{\nu}{\nu - \rho}$ est constant; on a donc, comme on l'avait annoncé,

$$\sum \frac{\text{MP}}{\text{MR}} = \text{const.}$$

la somme étant étendue à toutes les normales menées du point M à la courbe.

18. Pour terminer ces applications, considérons une courbe algébrique C, et un cercle Σ, de centre O. Menons les tangentes communes à la courbe et au cercle; soit t la longueur d'une de ces tangentes comprise entre les deux points de contact. Nous allons montrer qu'on a

$$\sum \frac{1}{t} = \text{const.}$$

quand le rayon du cercle varie, le centre O restant fixe. En effet, supposons que le cercle ait pour équation

$$\xi^2 + \eta^2 - R^2 = 0.$$

Soit ξ, η un point de la courbe $f = 0$, tel que la tangente en ce point à la courbe touche le cercle. On aura

$$[\xi f'_\xi + \eta f'_\eta]^2 = R^2(f'^2_\xi + f'^2_\eta)$$

et

$$t^2 = \xi^2 + \eta^2 - R^2,$$

c'est-à-dire

$$t^2 = \frac{(\xi^2+\eta^2)(f'^2_\xi + f'^2_\eta) - (\xi f'_\xi + \eta f'_\eta)^2}{f'^2_\xi + f'^2_\eta} = \frac{(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi)^2}{f'^2_\xi + f'^2_\eta},$$

et enfin

$$t^2 = \frac{(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi)^2}{(\xi f'_\xi + \eta f'_\eta)^2} R^2$$

ou

$$t = \frac{\xi f'_\eta - \eta f'_\xi}{\xi f'_\xi + \eta f'_\eta} R.$$

On voit que t est fonction rationnelle de ξ, η et R.

Faisons varier R; la somme $\sum \frac{1}{t}$ étendue aux points communs aux courbes

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad (\xi f'_\xi + \eta f'_\eta)^2 - R^2(f'^2_\xi + f'^2_\eta) = 0$$

ne peut devenir infinie que si une des quantités t devient nulle. Cette circonstance ne peut se présenter que dans deux cas :

1° Ou bien les deux points de contact de la tangente avec le cercle et la courbe coïncident; le cercle est alors tangent à la courbe, et deux des tangentes communes coïncident avec la tangente considérée;

2° Ou bien la direction de la tangente commune est une des directions cycliques du plan : ce cas ne peut

se présenter, pour une courbe C réelle, que si le centre du cercle est un foyer de la courbe. En excluant ce cas, il résulte de ce qui précède et du théorème général que $\sum \frac{1}{t}$ ne devient pas infini ; donc :

Si l'on mène les tangentes communes à un cercle et à une courbe algébrique, n'ayant pas pour foyer le centre du cercle, la somme des inverses des longueurs de ces tangentes reste constante quand le rayon du cercle varie, son centre restant fixe.

Si le cercle se réduit à un cercle de rayon nul, les tangentes communes à la courbe et au cercle se confondent deux à deux, et l'on voit aisément que deux tangentes confondues doivent être prises avec des signes contraires. La somme des inverses de leurs longueurs est donc nulle ; par conséquent :

La somme algébrique des inverses des longueurs des tangentes communes à un cercle et à une courbe algébrique est nulle, si le centre du cercle n'est pas un foyer de la courbe.

SUR LES VALEURS APPROCHÉES DES POLYNOMES DE BERNOULLI ;

PAR M. P. APPELL.

---

1. Dans une Note précédente ([1]), nous avons indiqué les principales propriétés des polynômes de Bernoulli $\varphi_p(x)$ qui, pour des valeurs entières positives de x,

([1]) *Nouvelles Annales*, p. 312 du présent Volume.

expriment la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres entiers

$$\varphi_0(x) = x, \qquad \varphi_1(x) = \frac{x(x+1)}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}, \qquad \ldots$$

Nous nous proposons maintenant de chercher une valeur approchée du polynôme $\varphi_p(x)$ quand p est très grand, et, pour cela, nous suivrons une méthode générale qui a été donnée par M. Darboux dans un Mémoire *Sur l'approximation de fonctions de très grands nombres* (*Journal de Liouville,* 3e série, t. IV; 1878).

La fonction de z

$$(1) \qquad f(z) = \frac{e^{z(x+1)} - 1}{e^z - 1}$$

est *holomorphe* (c'est-à-dire est uniforme, finie, et admet une dérivée) pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à 2π; en effet, cette fonction devient infinie aux seuls points

$$z = \pm 2\pi i, \qquad z = \pm 4\pi i, \qquad \ldots, \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

On peut donc développer $f(z)$ par la formule de Maclaurin en une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de z convergente dans le cercle de rayon 2π. Si l'on calcule les coefficients de ce développement, on voit que le coefficient de $\frac{z^p}{1.2\ldots p}$ est un polynôme en x qui se réduit à

$$1^p + 1^p + 3^p + \ldots + x^p$$

quand x est entier et positif : ce coefficient est donc le polynôme $\varphi_p(x)$, et l'on peut écrire

$$(2) \qquad f(z) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{1.2\ldots p} \varphi_p(x).$$

Le fait que le coefficient de $\frac{z^p}{1.2\ldots p}$ se réduit à la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers entiers quand x est entier et positif, résulte immédiatement de ce que, si x est un entier positif, $e^{z(x+1)}-1$ est divisible par e^z-1, et qu'on a, dans ce cas,

$$f(z)=1+e^z+e^{2z}+\ldots+e^{xz}.$$

Cela posé, on peut toujours déterminer deux constantes A et B, de telle façon que la différence

$$(3)\qquad \psi(z)=f(z)-\frac{A}{z-2\pi i}-\frac{B}{z+2\pi i}$$

reste finie, quel que soit x, pour $z=2\pi i$ et pour $z=-2\pi i$. En effet, le produit

$$(z-2\pi i)\,f(z)=\frac{z-2\pi i}{e^z-1}\left[e^{z(x+1)}-1\right]$$

est une fonction de z holomorphe dans le voisinage de $z=2\pi i$: par suite, pour des valeurs de z voisines de $2\pi i$, cette fonction est développable par la formule de Taylor, en une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de $(z-2\pi i)$,

$$(4)\quad (z-2\pi i)f(z)=A+A_1(z-2\pi i)+A_2(z-2\pi i)^2+\ldots,$$

où A est la valeur que prend le produit $(z-2\pi i)f(z)$ pour $z=2\pi i$,

$$A=e^{2\pi i(x+1)}-1=e^{2\pi x i}-1=i\sin 2\pi x-2\sin^2\pi x.$$

Il résulte alors du développement (4) que la différence

$$f(z)-\frac{A}{z-2\pi i}=A_1+A_2(z-2\pi i)+\ldots$$

reste finie pour $z=2\pi i$. On verra de même que, en prenant pour B la valeur du produit $(z+2\pi i)f(z)$ pour

$z = -2\pi i$, à savoir

$$B = e^{-2\pi i(x+1)} - 1 = -i\sin 2\pi x - 2\sin^2 \pi x,$$

la différence

$$f(z) - \frac{B}{z + 2\pi i}$$

reste finie quand z tend vers $-2\pi i$.

Les constantes A et B étant ainsi déterminées, la différence (3) appelée $\psi(z)$ est finie aux deux points $\pm 2\pi i$. La fonction $\psi(z)$ ne devient plus infinie qu'aux points $\pm 4\pi i$, $\pm 6\pi i$, ... : elle est donc développable, par la formule de Maclaurin, pour les valeurs de z dont le module est inférieur à 4π, et l'on a, pour ces valeurs,

$$\psi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_p z^p + \ldots.$$

Cette série est convergente, en particulier pour $2 = z\pi$, et l'on a

$$\lim (2\pi)^p a_p = 0 \qquad (p = \infty),$$

puisque le terme général d'une série convergente a pour limite zéro.

Écrivons alors l'identité (3) sous la forme

$$f(z) = \psi(z) + \frac{A}{z - 2\pi i} + \frac{B}{z + 2\pi i},$$

et, en supposant le module de z inférieur à 2π, développons les deux membres suivant les puissances positives croissantes de z : les coefficients de z^p devant être les mêmes dans les deux membres, on aura

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_p(x)}{1.2\ldots p} &= a_p - \frac{A - (-1)^p B}{(2\pi i)^{p+1}} \\ &= -[A - (-1)^p B]\frac{(1 + \varepsilon_p)}{(2\pi i)^{p+1}}\end{aligned}$$

en désignant par ε_p la quantité

$$\varepsilon_p = -\frac{a_p(2\pi i)^{p+1}}{A-(-1)^p B}$$

qui tend vers zéro quand p croît indéfiniment, d'après la remarque faite plus haut sur le produit $(2\pi)^p a_p$. D'après cela, en remplaçant A et B par leurs valeurs et distinguant les deux cas de p impair et de p pair, on a, pour les valeurs approchées de $\varphi_p(x)$ quand p est très grand,

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}.1.2.3\ldots(2n+1)\dfrac{\sin^2\pi x}{2^{2n}\pi^{2n+2}}(1+\varepsilon_{2n+1}), \\ \varphi_{2n}(x) \quad = (-1)^{n+1}.1.2.3\ldots 2n\,\dfrac{\sin 2\pi x}{2^{2n}\pi^{2n+1}}(1+\varepsilon_{2n}). \end{cases}$$

Lorsque x est entier, les quantités appelées A et B sont nulles et, par suite, la quantité appelée ε_p est infinie : les formules deviennent illusoires à partir du moment où l'on a introduit ε_p.

Ces formules (5) pourraient aussi se déduire des développements en série trigonométrique que donne Raabe dans le Tome 42 du *Journal de Crelle* pour les polynômes $\varphi_p(x)$. Il serait trop long de reproduire ici ces développements; je me bornerai à rappeler que M. Hermite a indiqué, dans le Tome 79 du *Journal de Crelle,* une méthode très simple pour les obtenir.

2. Ces résultats permettent, dans beaucoup de cas, de reconnaître la convergence ou la divergence de séries ordonnées suivant les polynômes $\varphi_p(x)$. Si nous prenons, par exemple, la série

$$S = \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)\varphi_0 x) + \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+1)^2}\right]\varphi_1(x) + \ldots$$
$$+ \left[\frac{1}{z^n} - \frac{1}{(z+1)^n}\right]\varphi_{n-1}(x) + \ldots$$

que nous avons considérée dans notre précédent article, nous avons facilement le résultat suivant :

La série S *est convergente quand* x *est un nombre entier positif ou négatif dont la valeur absolue est plus petite que celui des modules de* z *et de* $z+1$ *qui est le plus petit; elle a alors pour somme* $\frac{1}{z-x}$. *Cette série est divergente pour toute autre valeur de* x.

Pour le montrer, supposons d'abord que x soit un *nombre entier positif;* nous aurons

$$\varphi_p(x) = 1 + 2^p + 3^p + \ldots + x^p,$$

et la somme S_n des n premiers termes de la série S peut s'écrire

$$\begin{aligned} S_n = \frac{1}{z} &+ \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{z^n}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{z^n}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \ldots + \frac{3^{n-1}}{z^n}\right) + \ldots \\ &+ \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{z^n}\right) \\ &- \left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(z+1)^n}\right] \\ &- \left[\frac{1}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(z+1)^n}\right] \\ &- \left[\frac{1}{z+1} + \frac{3}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{3^{n-1}}{(z+1)^n}\right] - \ldots \\ &- \left[\frac{1}{z+1} + \frac{x}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(z+1)^n}\right], \end{aligned}$$

où les parenthèses sont des progressions géométriques dont les raisons respectives

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{2}{z}, \quad \frac{3}{z}, \quad \ldots, \quad \frac{x}{z}, \quad \frac{1}{z+1}, \quad \frac{2}{z+1}, \quad \ldots, \quad \frac{x}{z+1}$$

ont toutes, d'après l'hypothèse, des modules moindres que l'unité. Si donc on fait croître n indéfiniment, toutes ces progressions sont convergentes et l'on trouve

$$S = \lim S_n = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} - \ldots - \frac{1}{z-x+1},$$

c'est-à-dire, en réduisant,

$$S = \lim S_n = \frac{1}{z-x}.$$

Si x est un entier *négatif*, tel que les modules de $\frac{x}{z}$ et $\frac{x}{z+1}$ soient tous deux moindres que l'unité, on vérifie sans peine, en appliquant la même méthode et s'appuyant sur les relations

$$\varphi_0(-x) = -\varphi_0(x),$$
$$\varphi_p(-x) = (-1)^{p+1}\varphi_p(x-1), \qquad (p > 0),$$

que la série S est convergente et a pour somme $\frac{1}{z-x}$. Enfin, si x est nul, la série a évidemment pour somme $\frac{1}{z}$, c'est-à-dire encore $\frac{1}{z-x}$.

Mais il est très remarquable que, pour toute autre valeur de x (*non entière*), la série S est divergente, quel que soit z. En effet, dans ce cas, le terme de rang $(2n+3)$ de cette série a pour valeur approchée, quand n est très grand,

$$(-1)^{n+1}.1.2.3\ldots(2n+1)\left[\frac{1}{z^{2n+2}} - \frac{1}{(z+1)^{2n+2}}\right]\frac{4\sin^2\pi x}{(2\pi)^{2n+2}}(1+\varepsilon_{2n+1});$$

et, à cause du facteur $1.2.3\ldots(2n+1)$, ce terme *augmente indéfiniment* avec n, quel que soit z. La série S est donc divergente.

Il est évident que l'on pourra former une infinité

d'autres séries de polynômes $\varphi_p(x)$ possédant la même propriété que la série S, c'est-à-dire convergentes pour certaines valeurs entières de x et divergentes pour toute autre valeur de x.

THÉORIES DE LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE ET DE L'ABERRATION

[Suite (¹)];

PAR M. OSSIAN BONNET.

Remarque. — Dans la démonstration ou plutôt la vérification qui précède, on a supposé que les constantes *m*,

---

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. VI, juillet-août 1887. Quelques fautes matérielles se sont glissées dans ce premier article; quoiqu'elles n'aient aucune importance, il ne sera pas inutile d'en indiquer la correction :

Page 344, ligne 6 en descendant, *au lieu de* le moyen le plus simple, *lisez* l'évaluation la plus simple.

Page 350, ligne 3 en descendant, *entre* fondamental et des projections, *intercalez* de la théorie.

Page 360, lignes 2, 4, 8 en remontant, et page 361, ligne 4 en remontant, *au lieu de* 7993,147, *lisez* 7993,148.

Page 360, ligne 9 en remontant, *après* lequel poids, *ajoutez* rapporté à l'unité de volume.

Page 361, lignes 14 et 16 en remontant, *au lieu de* 7993,15, *lisez* 7993,148.

Page 364, ligne 2 en descendant, *supprimez* la diviser par $\sin 1''$ ou *et remplacez* 206265 par $\frac{648000}{\pi}$.

Page 364, ligne 4 en descendant, *remplacez* 206265 par $\frac{648000}{\pi}$.

Page 367, ligne 13 en remontant, et page 368, ligne 9 en descendant, *au lieu de* $10^7.799315$, *lisez* $10^6.7993148$.

Page 367, ligne 4 en remontant, *au lieu de* $\bar{1},9185493$, *lisez* $\bar{1},9185230$.

Page 368, ligne 11 en descendant, *au lieu de* 2,9439, *lisez* 2,94384.

M, a, D, $\frac{1}{2}(n_0'^2 - 1)$ et p_0' qui représentent respectivement le coefficient de dilatation de l'air, le coefficient de dilatation du mercure, le rayon terrestre, la hauteur de l'atmosphère, la demi-puissance réfractive et la pression en un point de l'atmosphère situé à la surface de la terre dans les conditions atmosphériques normales, étaient rigoureusement définies par les relations

$$m = 0{,}003671, \qquad M = 0{,}000179, \qquad a = 6366738,$$
$$D = 75000, \qquad \tfrac{1}{2}(n_0'^2 - 1) = 0{,}000294384, \qquad p_0' = 7993{,}148.$$

De plus, on a regardé les logarithmes à sept décimales fournis par les Tables comme jouissant d'une manière absolument exacte des mêmes propriétés que les logarithmes vrais ou théoriques au point de vue de la simplification des calculs numériques. Or tout cela n'est vrai qu'approximativement, et l'on peut avoir des doutes sur l'exactitude de la conclusion à laquelle nous avons été conduits. Voici une manière de raisonner qui est entièrement rigoureuse.

On peut toujours poser

$$m < 0{,}003671, \qquad M < 0{,}00017901, \qquad a + D < 6441800,$$
$$\tfrac{1}{2}(n_0'^2 - 1) < 0{,}00029439, \qquad p_0' > 7993{,}1,$$

ainsi que cela résulte de calculs et d'expériences incontestés. Cela étant, nous aurons d'abord

$$1 + mT_0 > 0{,}88987, \qquad 1 + MT_0 > 0{,}994629,$$

puis

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{(n_0^2 - 1)}{\rho_0} = \frac{1}{2}(n_0'^2 - 1)\frac{H_0}{0{,}76}\,\frac{1}{1 + mT_0}\,\frac{1}{1 + MT_0}$$
$$< 0{,}00029439 \,.\, 1{,}0382\,\frac{1}{0{,}88987}\,\frac{1}{0{,}994629},$$
$$\beta = \frac{p_0}{\rho_0} = p_0'(1 + mT_0) > 9993{,}1 \,.\, 0{,}88987,$$

et la relation $ru\alpha < \beta$ ou mieux $(a + D)\alpha < \beta$ qu'il

s'agit de vérifier deviendra, en augmentant le premier membre et diminuant le second,

$$64418.10^2\,\frac{29439}{10^8} < 7993{,}1.\overline{0{,}88987}^2.0{,}994629$$

ou

$$10^2.6{,}4418.2{,}9439 < 7{,}9931.\overline{8{,}8987}^2.9{,}94629.$$

Nous substituerons à cette inégalité l'inégalité logarithmique correspondante; seulement, au lieu de considérer dans celle-ci les valeurs exactes des deux membres, nous prendrons une valeur approchée par excès dans le premier membre et une valeur approchée par défaut dans le second membre, ce qui suffira évidemment. Or les logarithmes fournis par les Tables à sept décimales étant approchés par défaut ou par excès à moins d'une unité décimale du septième ordre, on a, la caractéristique L désignant les logarithmes théoriques ou vrais, 1°

$$\begin{aligned} &L.10^2 = 2\\ &L.6{,}4418 < 0{,}8090073\\ &L.2{,}9439 < 0{,}4689232\\ &L.1{,}0382 < 0{,}0162811 \end{aligned}$$

Ce qui donne........ $3{,}2942116$

pour la limite supérieure du premier membre de l'inégalité logarithmique, et 2°

$$\begin{aligned} &L.7{,}9931 > 0{,}9027151\\ 2\,&L.8{,}8987 > 1{,}8986530\\ &L.9{,}9463 > 0{,}9976615 \end{aligned}$$

Ce qui donne........ $3{,}7990296$

pour la limite inférieure du second membre de la même inégalité; on voit donc que l'inégalité logarithmique est satisfaite, et, par suite, que l'inégalité primitive l'est aussi.

VII. — Détermination de la valeur approchée de la réfraction totale.

Nous allons enfin déterminer une valeur approchée de l'intégrale définie

$$\frac{648000}{\pi}\,\alpha\,\text{tang}\,z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha(1-s)}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\,du,$$

où, pour simplifier, on a remplacé par ε la fonction

$$\left[1-\frac{1+2\alpha}{1+2\alpha u}(1-s)^2\right]\text{tang}^2 z_a$$

et qui exprime la valeur exacte de la réfraction totale R évaluée en secondes d'angle.

On a démontré précédemment que ε est positif pour toutes les valeurs de u et les valeurs correspondantes de s. De là il est aisé de conclure que l'on a

$$1-\tfrac{1}{2}\varepsilon < (1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} < 1-\tfrac{1}{2}\varepsilon+\tfrac{3}{8}\varepsilon^2.$$

En effet, $\varphi(\varepsilon)$ étant une fonction quelconque de ε, et θ et θ' deux nombres positifs moindres que 1, on sait que

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varphi'(\theta\varepsilon)\varepsilon$$

et

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varphi'(0)\varepsilon + \varphi''(\theta'\varepsilon)\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Faisons, dans la première égalité,

$$\varphi(\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} - 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

et, par suite,

$$\varphi'(\varepsilon) = -\tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}.$$

$\varphi(0)$ sera nul, $\varphi'(\varepsilon)$ sera positif pour ε positif; donc $\varphi(\varepsilon)$ sera positif, et l'on aura

$$1-\tfrac{1}{2}\varepsilon < (1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$$

pour ε positif. Faisons ensuite, dans la seconde égalité.

$$\varphi(\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} - 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2;$$

d'où

$$\varphi'(\varepsilon) = -\tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}\varepsilon$$

et

$$\varphi''(\varepsilon) = \tfrac{3}{4}(1+\varepsilon)^{-\frac{5}{2}} - \tfrac{3}{4};$$

$\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$ seront nuls, $\varphi''(\theta'\varepsilon)$ sera négatif pour ε positif; donc $\varphi(\varepsilon)$ sera négatif, et l'on aura

$$(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} < 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2$$

pour ε positif. Cela étant, si l'on pose

$$\begin{aligned}
&\frac{648000}{\pi}\alpha \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)du \\
&= \frac{648000}{\pi}\alpha \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}} \\
&\times \left\{1 - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1+2\alpha}{1+2\alpha u}(1-s)^2\right]\operatorname{tang}^2 z_a\right\} du = \mathrm{R}', \\
&\frac{3}{8}\,\frac{648000}{\pi}\alpha \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\varepsilon^2\, du \\
&= \frac{3}{8}\,\frac{648000}{\pi}\alpha \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}} \\
&\times \left[1 - \frac{1+2\alpha}{1+2\alpha u}(1-s)^2\right]^2 \operatorname{tang}^4 z_a\, du = \mathrm{R}'',
\end{aligned}$$

on aura

$$\mathrm{R}' < \mathrm{R} < \mathrm{R}' + \mathrm{R}'';$$

par suite,

$$0 < \mathrm{R} - \mathrm{R}' < \mathrm{R}'';$$

mais,

$$\frac{1-s}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}$$

étant toujours moindre que 1 et

$$1 - \frac{1+2\alpha}{1+2\alpha u}(1-s)^2$$

positif et toujours moindre que $1-(1-s)^2 < 2s$, R'' est moindre que

$$\frac{3}{2}\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha\sqrt{1+2\alpha}\,\text{tang}^5 z_a \int_0^1 s^2\,du$$

et, par conséquent, d'après ce qui a été démontré dans le paragraphe précédent, moindre que

$$3\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \text{tang}^5 z_a;$$

on peut donc écrire

$$(a)\qquad 0 < R - R' < 3\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \text{tang}^5 z_a,$$

et tout se réduit à trouver des limites R', c'est-à-dire de

$$\frac{648000}{\pi}\,\alpha\,\text{tang}\, z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{1}{2}\,\text{tang}^2 z_a\right)du$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha\,\text{tang}^3 z_a \int_0^1 \frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{(1+2\alpha u)^{\frac{5}{2}}}(1-s)^3\,du$$

ou encore de

$$\frac{648000}{\pi}\,\alpha\,\text{tang}\, z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{1}{2}\,\text{tang}^2 z_a\right)du$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha\,\text{tang}^3 z_a \int_0^1 \frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}(1-3s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{5}{2}}}\,du$$
$$+\frac{3}{2}\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha\,\text{tang}^3 z_a \int_0^1 \frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}} s^2\left(1-\frac{s}{3}\right)}{(1+2\alpha u)^{\frac{5}{2}}}\,du.$$

Or la troisième de ces dernières intégrales est moindre que $\frac{3}{2}\frac{648000}{\pi}\alpha(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\tang^3 z_a\int_0^1 s^2\,du$ et, par conséquent, moindre que $3\frac{648000}{\pi}\alpha(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\tang^3 z_a$. Si donc on l'appelle A_7 après y avoir supprimé le facteur

$$\frac{648000}{\pi}\alpha\tang z_a,$$

nous aurons, en premier lieu,

$$(7)\qquad 0 < A_7 < 3(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\tang^2 z_a.$$

Quant aux deux autres, elles se décomposent en les six suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}du = A_1,$$

$$-\frac{1}{2}\tang^2 z_a\int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}du = A_2,$$

$$-\int_0^1 \frac{\sqrt{(1+2\alpha)s}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}du = A_3,$$

$$\frac{1}{2}\tang^2 z_a\int_0^1 \frac{\sqrt{(1+2\alpha)s}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}du = A_4,$$

$$\frac{1}{2}\tang^2 z_a\int_0 \frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}du = A_5,$$

$$-\frac{3}{2}\tang^2 z_a\int_0^1 \frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}s}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}du = A_6,$$

où l'on a supprimé également le facteur $\frac{648000}{\pi}\alpha\tang z_a$.

La première de celles-ci est de la forme

$$\int_0^1 \varphi(u)\,du;$$

elle peut donc être évaluée exactement, et, si l'on observe que $(1+2\alpha u)^{-\frac{3}{2}}du$ est la différentielle par rapport à u de $-\frac{(1+2\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{\alpha}$, on trouve

$$A_1 = \frac{(1+2\alpha)^{\frac{1}{2}}-1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{\alpha^2}{2} - \ldots;$$

ce qui donne, 2α étant moindre que 1,

$$(1) \qquad 1-\frac{1}{2}\alpha < A_1 < 1-\frac{1}{2}\alpha+\frac{\alpha^2}{2}.$$

A_2 étant égal au produit de A_1 par un facteur connu qui est ici négatif, les limites de A_2 se déduisent immédiatement de celles de A_1 et l'on obtient

$$(2) \quad -\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\right) < A_2 < -\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\left(1-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Dans A_3 la fonction de u, $-\frac{\sqrt{1+2\alpha}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}$, qui entre en facteur sous le signe $\int$, croît avec u et a par conséquent

$$-\sqrt{1+2\alpha} = -\left(1+\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\ldots\right)$$

comme valeur minimum, et

$$-\frac{1}{1+2\alpha} = -(1-2\alpha+4\alpha^2-\ldots)$$

comme valeur maximum; donc, l'autre facteur s sous le signe $\int$ étant toujours positif, on peut écrire

$$-(1+\alpha)\int_0^1 s\,du < A_3 < -(1-2\alpha)\int_0^1 s\,du,$$

ce qui donne, en remplaçant l'intégrale par sa valeur obtenue plus haut,

$$(3)\qquad -(1+\alpha)\frac{\beta}{a} < A_3 < -(1-2\alpha)\frac{\beta}{a}.$$

A_4 étant le produit de A_3 par $-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a$, on a ensuite immédiatement

$$(4)\qquad (1-2\alpha)\frac{\beta}{a}\,\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a < A_4 < (1+\alpha)\frac{\beta}{a}\,\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a;$$

A_5, qui est comme A_1 de la forme $\int_0^1 \varphi(u)\,du$, rentre dans le type des quadratures ordinaires; on peut l'évaluer exactement et, si l'on observe que $(1+2\alpha u)^{-\frac{5}{2}}du$ est la différentielle par rapport à u de $-\frac{(1+2\alpha u)^{-\frac{3}{2}}}{3\alpha}$, on trouve

$$A_5 = \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\,\frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}-1}{3\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\left(1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{6}+\ldots\right).$$

ce qui donne, 2α étant moindre que 1,

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\left(1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{6}\right) < A_5 < \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\left(1+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Enfin, dans A_6, la fonction de u, $-\frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{(1+2\alpha u)^{\frac{5}{2}}}$, qui entre en facteur sous le signe $\int$, est croissante avec u et a par conséquent

$$-(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}} = -(1+3\alpha+\tfrac{3}{2}\alpha^2\ldots)$$

pour valeur minimum, et

$$-\frac{1}{1+2\alpha} = -(1-2\alpha+4\alpha^2-\ldots)$$

pour valeur maximum; donc, l'autre facteur s sous le

signe $\int$ étant toujours positif, on peut écrire

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\left(3+9\alpha+\frac{9}{2}\alpha^2\right)\int_0^1 s\,du$$
$$<A_6<-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a(3-6\alpha)\int_0^1 s\,du,$$

ce qui donne

$$(6)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\left(3+9\alpha+\frac{9}{2}\alpha^2\right)\frac{\beta}{a} \\ <A_6<-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a(3-6\alpha)\frac{\beta}{a}. \end{cases}$$

Ajoutant maintenant, membre à membre, les inégalités (1), (2), (3), (4), (5), (6) et (7), après avoir rétabli partout le facteur $\frac{648000}{\pi}\alpha \operatorname{tang} z_a$, et posant, pour abréger,

$$\frac{648000}{\pi}\alpha\operatorname{tang} z_a\left[1-\frac{\alpha}{2}-\frac{l}{a}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{l}{a}\right)\operatorname{tang}^2 z_a\right]=r,$$

$$\frac{648000}{\pi}\alpha\operatorname{tang} z_a$$
$$\times\left[\alpha\frac{\beta}{a}+\left(\frac{2}{3}\alpha^2+11\alpha\frac{\beta}{a}+\frac{9}{2}\alpha^2\frac{\beta}{a}\right)\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\right]=\delta,$$

$$\frac{648000}{\pi}\alpha\operatorname{tang} z_a$$
$$\times\left\{\frac{\alpha^2}{2}+2\alpha\frac{\beta}{a}+\left[7\alpha\frac{\beta}{a}+6(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\right]\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\right\}=\delta',$$

il vient

$$r-\delta<R'<r+\delta',$$

d'où

$$(b)\qquad -\delta<R'-r<\delta'.$$

Ajoutant encore, membre à membre, les inégalités (a) et (b), on trouve enfin

$$-\delta<R-r<\delta'+\frac{3.648000}{\pi}\alpha\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\operatorname{tang}^5 z_a,$$

et l'on voit que la valeur absolue de la différence $R-r$

est moindre que le plus grand des deux nombres positifs δ et

$$\delta' + \frac{3.648000}{\pi}\alpha\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \operatorname{tang}^5 z_a = \delta'',$$

lequel nombre a dès lors besoin d'être fixé, puisque c'est le seul dont nous ayons à tenir compte. Or, lorsque tang z_a est très grand ou z_a très près d'un droit, on a évidemment $\delta < \delta''$; et l'on s'assure qu'il en est toujours de même, quel que soit z_a, en faisant voir que l'on a

$$\frac{2}{3}\alpha^2 + 4\alpha\frac{\beta}{a} + \frac{9}{2}\alpha^2\frac{\beta}{a} < 6(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2,$$

ce qui est presque évident, car l'inégalité

$$a + D < \frac{\beta}{\alpha},$$

vérifiée dans le paragraphe précédent, entraîne la suivante, $\alpha < \frac{\beta}{a}$, et celle-ci donne

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\alpha^2 + 4\alpha\frac{\beta}{a} + \frac{9}{2}\alpha^2\frac{\beta}{a} \\
&\quad < \frac{2}{3}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + \frac{9}{2}\alpha\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 < 6\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + 12\alpha\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \\
&\quad < 6(1+2\alpha)\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 < 6(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, en résumé, r, c'est-à-dire

$$\frac{648000}{\pi}\alpha \operatorname{tang} z_a\left[1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{a} + \operatorname{tang}^2 z_a\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{a}\right)\right],$$

représente une valeur approchée en plus ou en moins de la réfraction totale R, avec une approximation marquée par

$$\begin{aligned}
\delta'' = \frac{648000}{\pi}\alpha \operatorname{tang} z_a \Big\{ &\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha\frac{\beta}{a} + \left[7\alpha\frac{\beta}{a} + 6(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\right]\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a \\
&+ 3\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \operatorname{tang}^4 z_a \Big\}.
\end{aligned}$$

En déterminant, comme on vient de le faire, une limite δ'' de l'erreur que l'on commet lorsqu'on remplace la réfraction vraie R par la quantité r que nous avons choisie pour sa valeur approchée, on a seulement préparé la solution du problème, seul utile dans les applications, qui a pour but de fixer les conditions sous lesquelles il faut opérer pour que l'approximation obtenue soit de l'ordre des grandeurs négligeables. Occuponsnous maintenant de ce qui reste à faire à ce sujet.

Reprenons l'expression de l'erreur δ'' et écrivons-la ainsi

$$\delta'' = \mathrm{A}\,\mathrm{tang}^5 z_a + \mathrm{B}'\,\mathrm{tang}^3 z_a + \mathrm{B}''\,\mathrm{tang}^3 z_u + \mathrm{C}\,\mathrm{tang}\, z_a,$$

en posant

$$\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 = \mathrm{A},$$

$$\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha\,\frac{7}{6}\,\alpha\,\frac{\beta}{a} = \mathrm{B}',$$

$$\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 = \mathrm{A}(1+2\alpha) = \mathrm{B}'',$$

$$\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha\,\frac{\alpha}{6}\left(\alpha + 4\,\frac{\beta}{a}\right) = \mathrm{C}.$$

Les coefficients A, B, B′, C dépendront des quantités α et β ou de H_0 et T_0, et varieront par conséquent avec l'état atmosphérique à l'instant et au lieu de l'observation. Cherchons les plus grandes valeurs qu'ils puissent prendre, et d'abord les plus grandes valeurs que puissent prendre α et $\frac{\beta}{a}$ en s'imposant, bien entendu, les conditions aux limites

$$0{,}63 < H_0 < 0{,}789; \qquad -30 < T_0 < 50$$

admises plus haut.

Toutes les notations et toutes les hypothèses dont on a fait jusqu'ici usage étant conservées, on sait que

$$\alpha = \frac{1}{2}(n_0'^2 - 1)\frac{H_0}{0,76}\frac{1}{1+MT_0}\frac{1}{1+mT_0},$$
$$\frac{\beta}{a} = p'_0(1+mT_0);$$

d'où, quels que soient H_0 et T_0,

$$\alpha < \frac{2,9439}{10^4}\,1,0382\,\frac{10}{8,8987}\,\frac{10}{9,9463},$$
$$\frac{\beta}{a} < \frac{1,2555}{10^3}\,1,1836.$$

Désignant donc par la caractéristique L les logarithmes théoriques et par la caractéristique l les logarithmes tabulaires, de sorte que l'on ait, pour un nombre quelconque N,

$$L.N - \frac{1}{10^7} < l.N < L.N + \frac{1}{10^7}$$

et

$$l.N - \frac{1}{10^7} < L.N < l.N + \frac{1}{10^7},$$

il viendra

$$L.\alpha < L.2,9439 - 4 + L.1,0382 + 2 - L.8,8987 - L.9,9463$$
$$< l.2,9439 - l.8,8987 - l.9,9463 - 2 + \frac{4}{10^7}$$

et

$$L.\frac{\beta}{a} < L.1,2555 - 3 + L\,1,1836$$
$$< l.1,2555 + l.1,1836 - 3 + \frac{2}{10^7};$$

mais les Tables de logarithmes donnent, comme on l'a

déjà vu,

$$l.2,9439 = 0,4689231,$$
$$l.1,0382 = 0,0162810,$$
$$l.8,8987 = 0,9493266,$$
$$l.9,9463 = 0,9976616,$$
$$l.1,2555 = 0,0988167,$$
$$l.1,1836 = 0,0732050\,;$$

donc

$$\mathrm{L}.\alpha < \bar{4},5382163$$

et

$$\mathrm{L}\,\frac{\beta}{a} < \bar{3},1720219;$$

par conséquent,

$$l.\alpha < \bar{4},5382164 \quad \text{et} \quad l.\frac{\beta}{a} < \bar{3},1720220,$$

$$\alpha < 0,00034532 \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{a} < 0,0014861.$$

Connaissant une limite supérieure de α et une limite supérieure de $\frac{\beta}{a}$, on en déduit sur-le-champ une limite supérieure de chacun des nombres

$$1+2\alpha, \quad \frac{1}{6}\alpha, \quad \frac{7}{6}\alpha = \alpha + \frac{1}{6}\alpha, \quad \alpha + 4\frac{\beta}{a},$$

qui entrent en facteurs dans A, B, B′, C, et l'on trouve

$$1+2\alpha < 1,0007,$$
$$\frac{\alpha}{6} < 0,000057554 = \frac{5,7554}{10^5},$$
$$\frac{7\alpha}{6} < 0,00040288 = \frac{4,0288}{10^4},$$
$$+\,4\frac{\beta}{a} < 0,0062898 = \frac{6,2898}{10^3}\,;$$

d'où

$$L(1+2\alpha) < 0{,}000304,$$
$$L\sqrt{1+2\alpha} < 0{,}000152,$$
$$L(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}} < 0{,}000456,$$
$$L\,\frac{\alpha}{6} < \bar{5}{,}7600756,$$
$$L\,\frac{7\alpha}{6} < \bar{4}{,}6051758,$$
$$L\left(\alpha + 4\,\frac{\beta}{a}\right) < \bar{3}{,}7986369.$$

Observant encore que $\frac{648000}{\pi}$ est compris entre 206264 et 206265, on a

$$\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha < 618795.0{,}00034532 = 6{,}18795 \times 10^{5}\,\frac{3{,}4532}{10^{4}};$$

mais on a vu plus haut que L.3,4532 est inférieur à 0,5382163 ; d'ailleurs on trouve

$$L.6{,}18795 < 0{,}7915470,$$

donc

$$L\,\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha < 2{,}3297633.$$

Tout ceci étant posé, il en résulte

$$\begin{aligned} L.A &< L\,\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^{2} \\ &< L\,\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha + \frac{1}{2}\,L(1+2\alpha) + 2\,L\,\frac{\beta}{a} \\ &< 2{,}3297633 + 0{,}0001520 + \bar{6}{,}3440438 \end{aligned}$$

ou

$$L.A < \bar{4}{,}6739591.$$

Puis

$$\begin{aligned} L.B' = L\,\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha\,\frac{7}{6}\,\alpha\,\frac{\beta}{a} &< L.\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha + L\,\frac{7}{6}\,\alpha + L\,\frac{\beta}{a} \\ &< 2{,}3297633 + \bar{4}{,}6051758 + 3{,}1720219, \end{aligned}$$

ou

$$\text{L.B}' < \bar{4},1069610.$$

Puis

$$\text{L.B}'' = \text{L.A}(1 + 2\alpha) = \text{L.A} + \text{L}(1 + 2\alpha)$$
$$< \bar{4},6739591 + 0,0003040;$$

ou

$$\text{L.B}'' < \bar{4},6724731.$$

Et enfin

$$\text{L.C} = \text{L}\,\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha\,\frac{\alpha}{6}\left(\alpha + 4\,\frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$$< \text{L}\,\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha + \text{L}\,\frac{\alpha}{6} + \text{L}\left(\alpha + 4\,\frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$$< 2,3297633 + \bar{5},7600756 + \bar{3},7986369$$

ou

$$\text{L.C} < \bar{5},8884758.$$

Les calculs qui précèdent font connaître, par leurs logarithmes, des nombres respectivement supérieurs à toutes les valeurs que prennent les quatre coefficients A, B, B′, C lorsqu'on donne à la hauteur barométrique H_0 et à la température T_0 tous les systèmes de valeurs que nous sommes convenus de considérer. Supposons maintenant qu'on ait substitué ces nombres aux coefficients A, B, B′, C eux-mêmes dans l'expression de l'erreur δ'' : celle-ci deviendra une fonction de la seule distance zénithale apparente z_a, et cette fonction, qui se réduira à une fonction entière et impaire de $\tang z_a$, à coefficients positifs, pourra prendre toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'infini, en variant d'ailleurs dans le même sens que $\tang z_a$ ou z_a; donc quelques essais suffiront pour déterminer une valeur de z_a, telle que cette valeur et les valeurs moindres donnent pour l'erreur δ'' des résultats de même ordre que les quantités considérées comme négligeables, ce qui est le but que nous voulons atteindre. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Prenons pour valeur maximum de z_a, $z_a = 80°$.

Les Tables de logarithmes donnent

$$l \tang 80° = 0,7536812;$$

d'où

$$L \tang 80° < 0,7536813,$$
$$L \tang^3 80° < 2,2610439,$$
$$L \tang^5 80° < 3,7684065,$$

donc

$$L.A \tang^5 80° < 3,7684065 + \bar{4},6739591 = 0,4423656;$$

d'où

$$A \tang^5 80° < 2,7693.$$

Puis

$$L.B' \tang^3 80° < 2,2610439 + \bar{4},1069610 = \bar{2},3680049;$$

d'où

$$B' \tang^3 80° < 0,023335.$$

Puis

$$L.B'' \tang^3 80° < 2,2610439 + \bar{4},6742731 = \bar{1},9353170;$$

d'où

$$B'' \tang^3 80° < 0,086162.$$

Puis

$$L.C \tang 80° < 0,7536812 + \bar{5},8884758 = \bar{4},6421571;$$

d'où

$$C \tang 80° < 0,0004387;$$

et enfin

$$\delta'' < 2,7693 + 0,023335 + 0,086162 + 0,0004387 < 2,88,$$

où l'unité est la seconde d'angle.

Cette erreur δ'' commise sur la réfraction R quand on considère celle-ci comme égale à r est sensiblement supérieure à celle des observations même les plus médiocres; nous la regarderons comme insuffisante, ce qui nous obligera à abaisser la limite de z_a que nous avions

prise égale à 80°. Faisons donc en second lieu $z_a \overline{\overline{<}} 70°$: nous aurons

$$l.\text{tang}\, z_a < l.\text{tang}\, 70° \overline{\overline{<}} 0,4389341;$$

d'où

$$\begin{aligned}&\text{L.tang } 70° < 0,4389342,\\&\text{L.tang}^3 70° < 1,3168026,\\&\text{L.tang}^5 70° < 2,1946710;\end{aligned}$$

donc

$$\text{L.A tang}^5 70° < 2,1946710 + \bar{4},6739591 = \bar{2},86863o1;$$

d'où

$$\text{A tang}^5 70° < 0,073898.$$

Puis

$$\text{L.B}'\text{tang}^3 70° < 1,3168026 + \bar{4},1069160 = \bar{3},4237636;$$

d'où

$$\text{B}'\text{tang}^3 70° < 0,0026532.$$

Puis

$$\text{L.B}''\text{tang}^3 70° < 1,3168026 + \bar{4},6742731 = \bar{3},9910757;$$

d'où

$$\text{B}''\text{tang}^3 70° < 0,0097967.$$

Puis

$$\text{L.C tang } 70° < 0,4389342 + \bar{5},8844758 = \bar{4},3274100;$$

d'où

$$\text{C tang } 70° < 0,00021253,$$

et enfin

$$\begin{aligned}\delta'' < 0,073898 &+ 0,0026532\\ &+ 0,00097967 + 0,00021253 < 0,087.\end{aligned}$$

Cette erreur est à peu près celle qui se rapporte aux observations les plus parfaites : nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire d'exiger qu'elle soit atteinte à cause de la grande étendue des distances zénithales que la condition $z_a < 70°$ obligerait d'écarter. Il vaut mieux augmenter la valeur maximum de z_a, poser par exemple

$z_a < 75^\circ$, ce qui laissera encore δ'' suffisamment petit, comme on va le voir. Nous avons ici

$$z_a \leq 75^\circ,$$

par suite

$$l.\text{tang}\, z_a < l.\text{tang}\, 75^\circ = 0,5719475,$$
$$\text{L}.\text{tang}\, 75^\circ < 0,5719476,$$
$$\text{L}.\text{tang}^3 75^\circ < 1,7158428,$$
$$\text{L}.\text{tang}^5 75^\circ < 2,8597380;$$

donc

$$\text{L}.\text{A}\,\text{tang}^5 75^\circ < 2,8597380 + \bar{4},6739591 = \bar{1},5336971;$$

d'où

$$\text{A}\,\text{tang}^5 75^\circ < 0,34175.$$

Puis

$$\text{L}.\text{B}'\text{tang}^3 75^\circ < 1,7158428 + \bar{4},1069610 = \bar{3},8228038;$$

d'où

$$\text{B}'\text{tang}^3 75^\circ < 0,0066498.$$

Puis

$$\text{L}.\text{B}''\text{tang}^3 75^\circ < 1,7158428 + \bar{4},6742731 = \bar{2},3901159;$$

d'où

$$\text{B}''\text{tang}^3 75^\circ < 0,024554.$$

Puis

$$\text{L}.\text{C}\,\text{tang}\, 75^\circ < 0,5719476 + \bar{5},8884758 = \bar{4},4604234;$$

d'où

$$\text{C}\,\text{tang}\, 75^\circ < 0,00028869,$$

et enfin

$$\delta'' < 0,34175 + 0,0066498 + 0,024554 + 0,00028869 < 0'',3733,$$

c'est-à-dire une quantité suffisamment petite pour la plupart des cas.

§ VIII. — Simplification du calcul des valeurs approchées r de la réfraction totale R, pour les différentes valeurs de H_0 comprises entre 0,63 et 0,794 et les différentes valeurs de T_0 comprises entre —30° et 50°.

Soient r' et r'' deux valeurs de r correspondant à une même valeur de la distance zénithale z_a et à deux systèmes différents H'_0 et T'_0, H''_0 et T''_0 de valeurs de la hauteur barométrique et de la température au moment et au lieu de l'observation, ces deux systèmes de valeurs satisfaisant, bien entendu, aux conditions limites convenues.

Nous aurons d'abord, comme on sait,

$$r' = \frac{648000}{\pi}\alpha' \operatorname{tang} z_a \left[1 + \frac{\alpha'}{2}(\operatorname{tang}^2 z_a - 1) - \frac{\beta'}{a}(\operatorname{tang}^2 z_a + 1)\right],$$

$$r'' = \frac{648000}{\pi}\alpha'' \operatorname{tang} z_a \left[1 + \frac{\alpha''}{2}(\operatorname{tang}^2 z_a - 1) - \frac{\beta''}{a}(\operatorname{tang}^2 z_a + 1)\right],$$

avec

$$\alpha' = \frac{1}{2}(n_0'^2 - 1)\frac{H'_0}{0,76}\frac{1}{1+mT'_0}\frac{1}{1+MT'_0},$$

$$\alpha'' = \frac{1}{2}(n_0'^2 - 1)\frac{H''_0}{0,76}\frac{1}{1+mT''_0}\frac{1}{1+MT''_0},$$

$$\frac{\beta'}{a} = p'_0(1+mT'_0),$$

$$\frac{\beta''}{a} = p'_0(1+MT''_0).$$

Retranchons membre à membre de l'équation qui détermine r'' celle qui détermine r' préalablement multipliée par

$$\frac{H''_0}{H'_0}\,\frac{1+mT'_0}{1+mT''_0}\,\frac{1+MT'_0}{1+MT''_0} = \frac{\alpha''}{\alpha'},$$

il viendra

$$r'' = r'_1 + \delta''',$$

en posant, pour abréger,

$$r' \frac{H''_0}{H'_0} \frac{1 + mT'_0}{1 + mT''_0} \cdot \frac{1 + MT''_0}{1 + MT'_0} = r'_1$$

et

$$\frac{648000}{\pi} \cdot \alpha'' \operatorname{tang} z_a \left[\frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha')(\operatorname{tang}^2 z_a - 1) + \left(\frac{\beta''}{a} - \frac{\beta'}{a} \right)(\operatorname{tang}^2 z_a + 1) \right] = \delta''';$$

cela prouve que r'_1 représente une valeur approchée en plus ou en moins de r'', avec un degré d'approximation marqué par la valeur absolue de δ''', et que s'il est permis de regarder cette valeur absolue comme étant de l'ordre des grandeurs négligeables, la valeur numérique de r'', égale à celle de r'_1, se déduira de celle de r' par un calcul très simple.

Cherchons donc une limite supérieure de la valeur absolue de l'erreur δ''' et d'abord une limite supérieure des valeurs absolues des deux différences $\frac{\beta''}{a} - \frac{\beta'}{a}$, $\alpha'' - \alpha'$.

Appelons δH_0 et δT_0 les valeurs absolues des différences $H''_0 - H'_0$, $T''_0 - T'_0$, en sorte que l'on ait

$$H''_0 = H'_0 \pm \delta H_0, \qquad T''_0 = T'_0 \pm \delta T_0,$$

et écrivons les égalités

$$\frac{\beta}{a} = p'_0 (1 + mT_0),$$

$$a = \frac{1}{2} (n'^2_0 - 1) \frac{H_0}{0,76} \frac{1}{1 + mT_0} \frac{1}{1 + MT_0},$$

qui définissent les valeurs générales de $\frac{\beta}{a}$ et de α, la première nous donnera immédiatement

$$\pm \frac{\beta'' - \beta'}{a} = p'_0 \, \delta T_0 < 0,0012555 \, m \, \delta T_0.$$

Le signe du premier membre étant celui qui le rend

positif, la seconde ou plutôt la suivante

$$L\alpha = L\frac{1}{2}(n_0'^2 - 1) + L\frac{H_0}{0,76} - L(1 + mT_0) - L(1 + MT_0),$$

qui s'en déduit, en prenant les logarithmes népériens de ses deux membres, donne

$$\begin{aligned} L\alpha'' - L\alpha' = LH_0'' - LH_0' - [L(1 + mT_0'') - L(1 + mT_0')] \\ - [L(1 + MT_0'') - L(1 + MT_0')]; \end{aligned}$$

par suite, d'après le théorème connu sur les accroissements des fonctions,

$$\frac{\alpha'' - \alpha'}{\alpha'''} = \frac{H_0'' - H_0'}{H_0'''} - \frac{m(T_0'' - T_0')}{1 + mT_0'''} - \frac{M(T_0'' - T_0')}{1 + MT_0^{\text{iv}}},$$

α''' étant un nombre compris entre α' et α'', par conséquent moindre que la limite supérieure de α que nous avons trouvée plus haut égale à 0,00034532, H_0''' un nombre compris entre H_0' et H_0'' et, *a fortiori*, entre 0,63 et 0,795; enfin, T_0''' et T_0^{iv} des nombres compris entre T_0' et T_0'' et, *a fortiori*, entre -30 et 50, ce qui donne $1 + mT_0'''$ compris entre 0,88987 et 1,1836, et $1 + MT_0^{\text{iv}}$ compris entre 0,99463 et 1,00895; de là on conclut

$$\pm(\alpha'' - \alpha') < 0,00034532\left(\frac{\delta H_0}{0,63} + \frac{m\,\delta T_0}{0,88987} + \frac{M\,\delta T_0}{0,99463}\right),$$

le signe du premier membre étant celui qui le rend positif.

Connaissant une limite supérieure de chacune des différences $\alpha'' - \alpha'$, $\frac{\beta''}{\alpha} - \frac{\beta'}{\alpha}$, prise en valeur absolue, il suffit de les associer avec les valeurs maxima de $\frac{648000}{\pi}$, α'', z_a qui sont respectivement 206265, 0,00034532, 75°

et l'on trouve pour la limite de l'erreur δ'''

$$\delta''' < 206265.0,00034532.\tfrac{1}{2}\,0,00034532$$
$$\times \operatorname{tang} 75^\circ \frac{\cos 30^\circ}{\cos^2 75^\circ}\left(\frac{\delta H_0}{0,63} + \frac{m\,\delta T_0}{0,88987} + \frac{M\,\delta T_0}{0,99463}\right)$$
$$+ 206265.0,00034532 \times \frac{\operatorname{tang} 75^\circ}{\cos^2 75^\circ}\, m\,\delta T_0$$

ou, pour abréger,

$$\delta''' < P\left(\frac{\delta H_0}{0,63} + \frac{m\,\delta T_0}{0,88987} + \frac{M\,\delta T_0}{0,99463}\right) + Q\,m\,\delta T_0,$$

en posant

$$206265.0,00034532 \cdot \frac{1}{2}\, 0,00034532 \cdot \frac{\operatorname{tang} 75^\circ \cos 30^\circ}{\cos^2 75^\circ} = P,$$
$$206265.0,00034532\, \frac{\operatorname{tang} 75^\circ}{\cos^2 75^\circ} = Q.$$

Mais si dans P on remplace 206265 par 3.206265 et $\frac{1}{2}$0,00034532 par $\frac{1}{6}$0,00034532, la plupart des facteurs qui entreront, soit dans P, soit dans Q, seront compris parmi les nombres qui ont déjà figuré dans les calculs numériques du paragraphe précédent, sous la dénomination de $\frac{3.648000}{\pi}$, α, $\frac{\alpha}{6}$, $\frac{p_0}{a p_0}$ et dont les logarithmes sont respectivement

$$5,7915470,\quad \bar{4},5382163,\quad \bar{5},7600756,\quad \bar{3},0988168;$$

quant aux facteurs

$$\frac{\operatorname{tang} 75^\circ}{\cos^2 75^\circ},\quad \frac{\operatorname{tang} 75^\circ \cos 30^\circ}{\cos^2 75^\circ},\quad 206265,$$

dont il n'a pas encore été question, on trouve sur-le-champ,

$$\begin{aligned}
&L.\operatorname{tang} 75^\circ && < 0,5719467,\\
&L.\cos 75^\circ && < \bar{1},4129961,\\
&L.\cos 30^\circ && < \bar{1},9375307,\\
&L\,\frac{\operatorname{tang} 75^\circ}{\cos^2 75^\circ} && < 1,7459554,\\
&L\,\frac{\operatorname{tang} 75^\circ \cos 30^\circ}{\cos^2 75^\circ} && < 1,6834861,\\
&L.206265 && < 5,3144150:
\end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned} \text{L.P} &< 2,3297633 + \bar{5},7600756 + 1,6834861 = \bar{1},7733250,\\ \text{L.Q} &< 5,3144150 + \bar{4},5382163\\ &\quad + \bar{3},0988168 + 1,7459554 = 0,6974142. \end{aligned}$$

Les calculs qui précèdent font connaître par leurs logarithmes des nombres respectivement supérieurs aux valeurs des coefficients numériques P et Q. Mais la connaissance de ces nombres ne suffit pas pour donner immédiatement la valeur limite de δ''', ce qui est le seul résultat utile. Cela tient à ce que δ''' dépend des différences δH_0 et δT_0 dont on n'a pas encore fixé les valeurs et que l'on sait seulement devoir être assez petites pour que δ''', qui en est une fonction linéaire et homogène, soit de l'ordre des grandeurs négligeables, et en même temps assez grandes pour qu'on n'ait à considérer qu'un petit nombre de groupes de deux états atmosphériques répondant aux valeurs H'_0, T'_0 et H''_0, T''_0 de H_0, T_0.

Or, après quelques tâtonnements qui se présentent d'ailleurs d'eux-mêmes, on reconnaît que le but est atteint en posant

$$\delta H_0 \lesseqgtr 0,76 - 0,63 = 0,13 > 0,789 - 0,76$$

et, en même temps,

$$\delta T_0 \lesseqgtr 20^\circ.$$

En effet, m et M étant respectivement moindres que 0,003671 et 0,000179, nous aurons

$$\frac{\delta H_0}{H_0} < \frac{13}{63} < 0,20635, \qquad m\,\delta T_0 < 0,07342 = \frac{7,342}{10^2},$$

$$\frac{m\,\delta T_0}{0,88987} < \frac{7,342}{8,8987.10}, \qquad \frac{\text{M}\,\delta T_0}{0,99463} < \frac{0,003580}{0,99463} = \frac{3,58}{9,9463.10^3},$$

d'où

$$L\frac{\delta H_0}{H_0} < L.2,0365 - 1 < \bar{1},3146046,$$

$$L.m\,\delta T_0 < L.7,342 - 2 < \bar{2},8658145,$$

$$L\frac{m\,\delta T_0}{0,88987} < L.7,342 - L.8,8987 - 1$$

$$< 0,8658145 - 0,9493265 - 1 = \bar{2},9164880,$$

$$L\frac{M\,\delta T_0}{0,99463} < L.3,58 - L.9,9463 - 2$$

$$< 0,5538831 - 0,9976615 - 2 = \bar{3},5562216,$$

puis

$$L.P\frac{\delta H_0}{H_0} = L.P + L.\frac{\delta H_0}{H_0}$$

$$< \bar{1},7733250 + \bar{1},3146046 = \bar{1},0879296,$$

d'où

$$P\frac{\delta H_0}{H_0} < 0,12245.$$

Puis

$$L.P\frac{m\,\delta T_0}{0,88987} = L.P + L\frac{m\,\delta T_0}{0,88987}$$

$$< \bar{1},7733250 + \bar{2},9164880 = \bar{2},6898130,$$

d'où

$$P\frac{m\,\delta T_0}{0,88987} < 0,048957.$$

Puis

$$L.P\frac{M\,\delta T_0}{0,99463} = L.P + L\frac{M\,\delta T_0}{0,99463}$$

$$< \bar{1},7733250 + \bar{3},5562216 = \bar{3},3295468,$$

d'où

$$P\frac{M\,\delta T_0}{0,99463} < 0,0021358.$$

Puis

$$L.Q\,m\,\delta T_0 = L.Q + L\,m\,\delta T_0$$

$$< 0,6974142 + \bar{2},8658145 = \bar{1},5632287,$$

d'où

$$Q\,m\,\delta T_0 < 0,36579;$$

et enfin

$$\delta''' < 0,12245 + 0,048957 + 0,0021358 + 0,36579.$$

Cette erreur ajoutée à celle qui a été déjà commise en prenant r au lieu de R et que l'on sait être moindre que 0,37323 donne 0,91256, c'est-à-dire une quantité inférieure à $1''$ d'angle; nous conviendrons de regarder cette erreur totale comme une quantité négligeable, quoiqu'elle soit sensiblement supérieure aux erreurs des observations actuelles. Cela posé, voici la marche qu'il convient de suivre pour obtenir la réfraction correspondant à un état atmosphérique quelconque que nous regarderons comme celui auquel se rapportent les valeurs H''_0, T''_0 de H_0, T_0. Considérons les trois états atmosphériques que nous appellerons *fondamentaux* et pour lesquels on a respectivement

$$\begin{aligned} H_0 &= 0{,}76, & T_0 &= -30^\circ; \\ H_0 &= 0{,}76, & T_0 &= 10^\circ; \\ H_0 &= 0{,}76, & T'_0 &= 50^\circ, \end{aligned}$$

et évaluons directement la réfraction r relative à chacun d'eux au moyen de la formule générale

$$r = \frac{648000}{\pi} \alpha \operatorname{tang} z_a \left[1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{a} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{a}\right) \operatorname{tang}^2 z_a\right].$$

Regardons ensuite successivement chacun de ces trois états atmosphériques comme étant celui qui a été défini plus haut par les valeurs H'_0, T'_0 de H_0 et de T_0. Si l'on choisit le premier, on voit que la réfraction cherchée r'' pourra être calculée par la formule

$$r'' = r'_1 = r' \frac{H''_0}{0{,}76} \frac{1 - 30m}{1 + mT''_0} \frac{1 - 30M}{1 + MT''_0},$$

toutes les fois que T''_0 sera compris entre -30 et -10, H''_0 étant d'ailleurs quelconque ou plutôt compris entre 0,63 et 0,789, car les différences $H''_0 - H'_0$ et $T''_0 - T'_0$ satisferont bien aux conditions

$$\pm(H''_0 - H'_0) = \delta H_0 < 0{,}13, \qquad \pm(T''_0 - T'_0) = \delta T_0 < 20.$$

Si l'on choisit le second état atmosphérique, on aura

$$r'' = r' \frac{H''_0}{0,76} \frac{1+10m}{1+mT''_0} \frac{1+10M}{1+MT''_0},$$

pourvu que T''_0 soit compris entre -10 et $+30$.

Enfin, si l'on choisit le troisième état atmosphérique, celui pour lequel on a $T'_0 = 50$, on aura

$$r'' = r' \frac{H''_0}{0,76} \frac{1+50m}{1+mT'_0} \frac{1+50M}{1+MT'_0},$$

pourvu que T''_0 soit compris entre 30° et 50°.

Ainsi, quelle que soit la valeur de T''_0 entre -30 et 50 et la valeur de H''_0 entre 0,63 et 0,789, la réfraction cherchée r'' pourra être calculée au moyen de la formule

$$r'' = r' \frac{H''_0}{H'_0} \frac{1+mT'_0}{1+mT''_0} \frac{1+MT'_0}{1+MT''_0},$$

et le résultat sera obtenu à moins d'une seconde près en plus ou en moins.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 1526;

PAR M. A. DROZ,
Professeur à l'École cantonale de Porrentruy

Considérons un parallélogramme ABCD *et une droite* MM' *quelconque de son plan. Il existe deux coniques circonscrites au parallélogramme et tangentes à la droite* MM'. *Soit* O *le milieu du segment déterminé sur cette droite par les deux points de contact. Il existe, en outre, une conique inscrite dans le parallélogramme et tangente à la droite* MM'. *Soit* O'

son point de contact avec cette droite. Les points O *et* O′ *coïncident.* (H. ANDOYER.)

On sait que toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère ABCD coupent une droite quelconque de leur plan suivant un système involutif. L'involution est déterminée par les paires de points $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$, où la droite MM′ coupe les coniques dégénérées AB et CD, BC et AD du faisceau.

Les points doubles de l'involution sont les points de contact des deux coniques du faisceau qui sont tangentes à MM′. Ces points peuvent être imaginaires, mais le point milieu O du segment compris entre ces points est toujours réel. C'est le point central de l'involution; il est déterminé par la relation

$$O\alpha . O\alpha' = O\beta . O\beta'.$$

D'autre part, il est facile d'obtenir le point de contact O′ en considérant MM′ comme deux tangentes coïncidentes d'un hexagone de Brianchon dont les quatre autres côtés seraient les côtés du parallélogramme. Par β, on mène une parallèle à AB, et par α' une parallèle à AD. Ces deux droites se coupent en I. La droite AI rencontre MM′ au point de contact cherché O′.

Or, par raison de parallélisme, on a

$$\frac{O'\beta}{O'\alpha} = \frac{O'I}{O'A} = \frac{O'\alpha'}{O'\beta'},$$

d'où

$$O'\alpha . O'\alpha' = O'\beta . O'\beta'.$$

Les points O et O′ doivent donc coïncider.

SOLUTION DE LA QUESTION 1565;

PAR M. E. LEMOINE.

Les points de Brocard et le point de Steiner sont sur une hyperbole circonscrite au triangle fondamental. (E. CESARO.)

L'équation de l'hyperbole circonscrite au triangle ABC et qui passe par les points de Brocard est, en coordonnées normales homogènes,

$$\frac{c^2b^2-a^4}{a\alpha}+\frac{a^2c^2-b^4}{b\beta}+\frac{a^2b^2-c^4}{c\gamma}=0,$$

ainsi que nous l'avons montré (*Mathésis*, p. 107; 1885).

Elle est satisfaite si l'on y remplace α, β, γ par $\frac{1}{a(b^2-c^2)}$, $\frac{1}{b(c^2-a^2)}$, $\frac{1}{c(a^2-b^2)}$, coordonnées du point de Steiner. C. Q. F. D.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1571. C_m^p désignant le nombre des combinaisons de m lettres p à p, démontrer la formule

$$2^{2n}=C_{2n}^n+2C_{2n-1}^{n-1}+\ldots+2^kC_{2n-k}^{n-k}+\ldots+2^n.$$

(PELLERIN.)

1572. TP et TQ sont des tangentes à une parabole de foyer S; la droite TS rencontre le cercle en un point L; prouver, par la Géométrie pure, que TS = SL.

(R.-W. GENÈSE.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME VI, 3e SÉRIE).

Algèbre.

Pages.

Géométrie élémentaire.

Géométrie analytique à deux dimensions.

Géométrie analytique à trois dimensions.

Calcul différentiel et intégral.

Mécanique.

Astronomie.

Questions proposées.

Sujets de composition donnés à divers concours.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE
(TOME VI, 3e SÉRIE).

(On a marqué d'un astérisque les noms des Auteurs d'articles ainsi que les numéros des pages qui correspondent au commencement de ces articles.)

12561 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BERTRAND (J.), de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — **Thermodynamique.** Un beau vol. grand in-8, avec nombreux tableaux et figures dans le texte; 1887 .... 10 fr.

... Cette publication d'un maître illustre, qui contient tant de vues nouvelles et profondes, marquera, nous croyons pouvoir l'affirmer, une date dans l'histoire de la Thermodynamique. Écrite dans ce langage élégant et lucide qu'il est superflu de louer, elle donne, en même temps qu'un exposé magistral des principes fondamentaux, les applications les plus propres à intéresser les physiciens et contribuera, dans une large mesure, à répandre le goût d'une science qui a déjà fait ses preuves, mais dont l'avenir est pour ainsi dire sans limite.

BRISSE (Ch.), Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Condorcet, Répétiteur de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique. — **Cours de Géométrie descriptive.**

Ire PARTIE, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques élémentaires. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1882 .... 5 fr.

IIe PARTIE, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1887.
Prix pour les souscripteurs .... 7 fr.

Un premier fascicule a paru.

DARBOUX (Gaston), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la Théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 2 volumes grand in-8, avec figures dans le texte, se vendant séparément :

Ire PARTIE. — *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima;* 1887 .... 15 fr.

IIe PARTIE. — *Théorie des systèmes de rayons rectilignes. Formules de Codazzi. Lignes géodésiques. Théorie des surfaces applicables sur une surface donnée;* 1888 .... (*Sous presse.*)

FOURIER. — **Œuvres de Fourier**, publiées par les soins de GASTON DARBOUX, Membre de l'Institut, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. 2 vol. in-4.

TOME I : *Théorie analytique de la Chaleur;* 1888 .... 25 fr.
TOME II : *Mémoires divers* .... (*Sous presse.*)

JORDAN (Camille), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.** 3 volumes in-8, avec figures dans le texte, se vendant séparément :

TOME I. — CALCUL DIFFÉRENTIEL; 1882 .... 11 fr.
TOME II. — CALCUL INTÉGRAL (*Intégrales définies et indéfinies*); 1883 .... 12 fr.
TOME III. — CALCUL INTÉGRAL (*Équations différentielles*). 17 fr.

KŒHLER (J.), ancien Répétiteur à l'École Polytechnique, ancien Directeur des Études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. — **Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure.** *Questions et solutions.* A l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale et à l'Agrégation. 2 volumes in-8, avec figures.

On vend séparément :

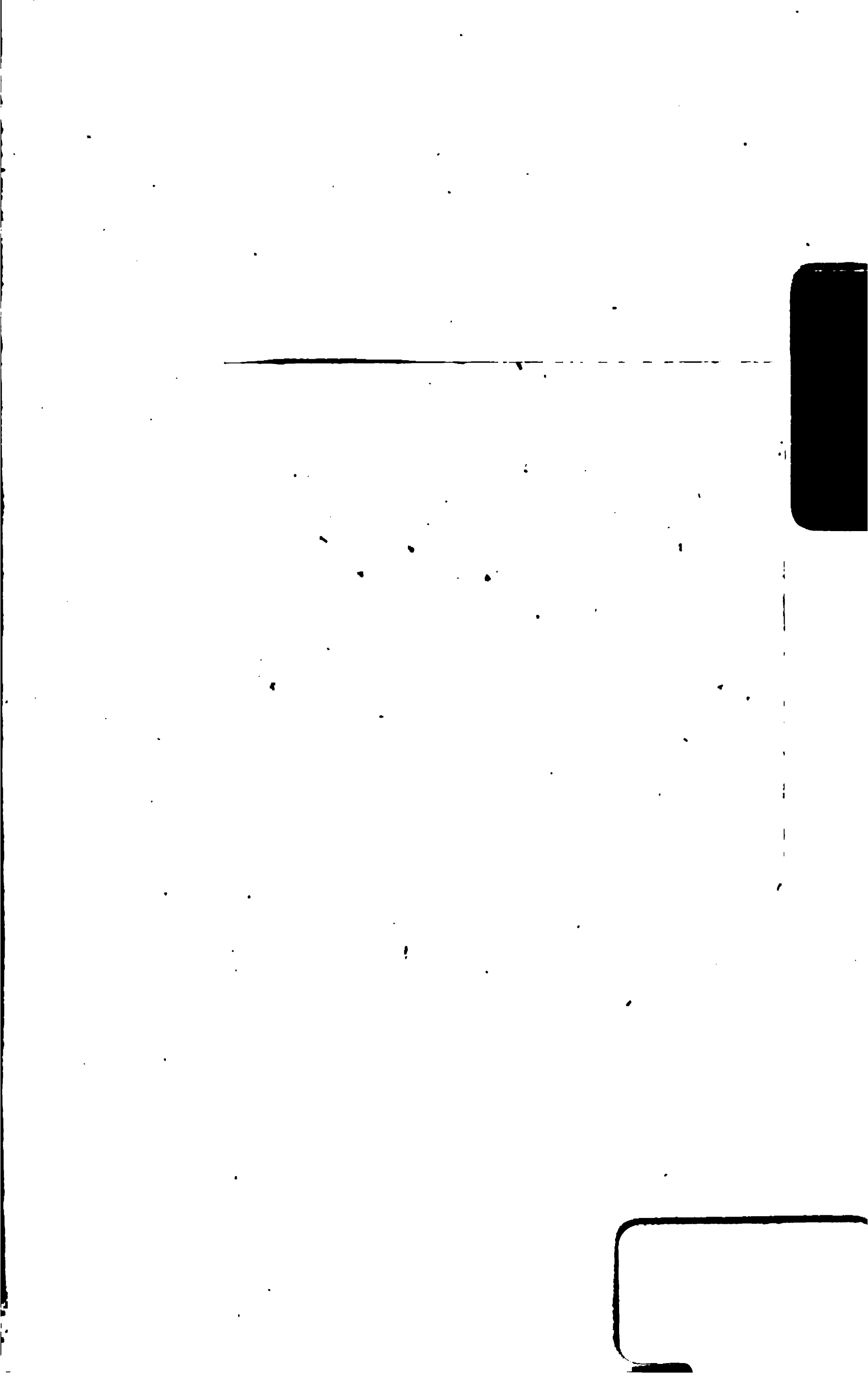
Ire PARTIE : *Géométrie plane;* 1886 .... 9 fr.
IIe PARTIE : *Géométrie dans l'espace;* 1888 .... 9 fr.

TABLE DES MATIÈRES.

Décembre 1887.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.




3 2044 102 934